



UNIVERSITÀ DI PISA  
Facoltà di Ingegneria

---

Corso di Laurea Specialistica in  
INGEGNERIA MECCANICA

# **Miglioramento dell'interpretazione di dati sperimentali e numerici ottenuti dal Diaptometro e sviluppo di un algoritmo per l'analisi di materiali non di Hollomon**

Tesi di Laurea Specialistica

Emanuele Moriconi

Relatori:

Prof. Ing. M. Beghini

Ing. L. Bosio

---

Anno Accademico 2009-2010



## Ringraziamenti

Desidero ringraziare in primis tutti coloro che mi hanno aiutato, direttamente o indirettamente, nella realizzazione di questo lavoro, a cominciare dal prof. Marco Beghini del DIMNP dell'Università di Pisa, gli ingegneri Marco Bacchereti, Luca Bosio, Mattia De Michelis e Giusi Di Pietro di Scienza Machinale, il prof. Vigilio Fontanari e l'ing. Bernardo Monelli dell'Università di Trento.

Un sentito ringraziamento va ovviamente ai miei genitori Antonella e Giuseppe, a mio fratello Bruno, ai miei nonni Rina e Salvatore, a Paola, Mauro, Simone e Giulia che nel corso di tutti questi anni non hanno mai mancato di fornire il proprio appoggio sotto ogni punto di vista.

Un grazie speciale per la mia ormai prossima futura moglie Catia, che ha condiviso con me fin dall'inizio tutti i sacrifici, morali e materiali, derivanti dalla scelta di un percorso di vita come questo, facendosene carico senza mai mostrarne il peso.

Infine, per ordine ma non per importanza, voglio ringraziare tutti i miei amici e compagni di viaggio Alessandro Brunini, Jonathan, Michele, Alessandro Benedetti, Suly, Tommaso ed Antonio (e se dimentico qualcuno spero mi perdoni) i quali non hanno mai mancato di fornire il proprio aiuto quando ne ho avuto bisogno.

---

## Sommario

In questo lavoro viene affrontato lo sviluppo ed il miglioramento di un algoritmo, rispondente a requisiti di efficacia ed efficienza, tramite il quale si procederà all'elaborazione di curve, ottenute da prove di indentazione sferica strumentata tramite il diaptometro, al fine di ricavare da esse informazioni circa l'andamento della curva di trazione del materiale. L'algoritmo, sulla base di un vasto database di curve ottenute mediante simulazioni agli elementi finiti del processo di indentazione su materiali cosiddetti di Hollomon, si propone di riuscire a fornire indicazioni corrette riguardo alla legge costitutiva del materiale analizzato sperimentalmente, sia che esso stesso appartenga alla famiglia dei materiali di Hollomon, sia che ciò non avvenga. In particolare, in quest'ultimo caso, vengono proposte una serie di migliorie da apportare all'Analisi Progressiva, la quale è una tecnica appositamente studiata per cercare di prevedere il comportamento di materiali non hollomoniani attraverso una combinazione di curve di Hollomon.

## Abstract

In this paper is handled the development and improvement of an algorithm through which we will process the curves obtained from instrumented spherical indentation test with diaptometro in order to extract informations from them about the material's tensile curve. The algorithm, based on an extensive database of curves obtained by finite element simulation of indentation process on so called Hollomon's materials, is to be able to provide correct informations about the constitutive relation of the material, experimentally analyzed, which is itself an Hollomon material, is that this does not happen. In particular, in the latter case, we propose a series of improvements to be introduced in the progressive analysis, which is a technique specifically designed to try to predict the behavior of no-Hollomonian materials through a combination Hollomon's curves.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Il Diaptometro e la qualificazione dei materiali . . . . .	1
1.2	Dalla prova di indentazione alla curva di trazione . . . . .	2
1.2.1	Sviluppo della funzione analitica . . . . .	3
1.2.2	Ricerca dei parametri $\sigma_0$ - $n$ ottimali . . . . .	6
1.3	Obiettivi della tesi . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Procedura di Inversione</b>	<b>9</b>
2.1	Applicazione al database di curve FEM . . . . .	9
2.2	Difetti della procedura di inversione . . . . .	14
2.3	Nuova Inverse Procedure . . . . .	17
2.4	Risultati conseguiti . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Funzione Interpolante</b>	<b>24</b>
3.1	Calcolo dei coefficienti $B_k$ e $\beta_{ijk}$ . . . . .	24
3.2	Analisi dei risultati . . . . .	26
3.3	Modifiche al primo livello di interpolazione . . . . .	29
3.3.1	Illustrazione del problema . . . . .	29
3.3.2	Calcolo del coefficiente $B_0$ . . . . .	30
3.3.3	Risultati conseguiti . . . . .	31
3.4	Secondo livello di interpolazione . . . . .	34
3.4.1	Illustrazione del problema . . . . .	34
3.4.2	Modifica della funzione polinomiale . . . . .	35
3.4.3	Risultati conseguiti . . . . .	37
3.5	Sviluppo di tecniche alternative . . . . .	42
3.5.1	Interpolazione mediante funzioni spline . . . . .	42
3.5.2	Interpolazione mediante funzioni polinomiali locali . . . . .	46
3.5.3	Interpolazione mediante rigate . . . . .	49

---

<b>4</b>	<b>Analisi Dimensionale</b>	<b>52</b>
4.1	Introduzione . . . . .	52
4.2	Analisi dimensionale . . . . .	54
4.2.1	Illustrazione del problema . . . . .	54
4.2.2	Scelta dei gruppi adimensionali . . . . .	54
4.3	Funzione polinomiale globale . . . . .	56
4.3.1	Analisi dei risultati . . . . .	58
4.4	Interpolazione mediante rigate . . . . .	66
4.5	Utilizzo del nuovo approccio . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Azzeramento dei dati sperimentali</b>	<b>73</b>
5.1	Illustrazione del problema . . . . .	73
5.2	Stima iniziale del punto di azzeramento . . . . .	75
5.3	Procedura di azzeramento . . . . .	76
5.4	Sensibilità della IP al punto di azzeramento . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Analisi Progressiva</b>	<b>85</b>
6.1	Introduzione . . . . .	85
6.2	Principi di base . . . . .	86
6.3	Combinazione delle curve di Hollomon . . . . .	88
6.4	Legame funzionale tra $\varepsilon$ ed $h$ . . . . .	92
6.5	Applicazioni dell'analisi progressiva . . . . .	96
6.6	Scelta del vettore $H$ . . . . .	103
6.7	Problemi e possibili sviluppi futuri . . . . .	106
<b>7</b>	<b>Conclusioni e sviluppi futuri</b>	<b>108</b>
7.1	Analisi delle curve L-h . . . . .	108
7.2	Analisi Incrementale . . . . .	110
7.3	Conclusioni . . . . .	111



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Il Diaptometro e la qualificazione dei materiali

Nello studio dei materiali e nelle loro applicazioni alla tecnica ed all'ingegneria lo strumento teorico più utile è la curva tensione - deformazione  $\sigma - \varepsilon$ . Da essa, infatti, è possibile ricavare tutte le informazioni necessarie alla progettazione.

Il modo più diffuso di ricavare la curva  $\sigma - \varepsilon$  di un materiale è la prova di trazione, test standardizzato dalle norme internazionali. Tuttavia, nonostante il suo elevato livello di affidabilità e la capillare diffusione industriale di macchinari in grado di eseguirla, la prova di trazione, per la sua natura di test *distruttivo* presenta alcuni inconvenienti:

- costo relativamente elevato
- necessità di ricavare provini standardizzati dal materiale di cui si dispone
- impossibilità di effettuare controlli del processo produttivo, se non attraverso un sistema di gestione della qualità basato su processi stocastici

Il diaptometro è uno strumento di caratterizzazione dei materiali il cui intento è di colmare queste lacune. In sostanza, si tratta di un indentatore sferico strumentato, che lascia come testimone, a prova terminata, un cratere di diametro inferiore a mezzo millimetro e profondità pari a qualche decina di micrometri. Quindi, la caratterizzazione del materiale per mezzo del diaptometro è da considerarsi una prova non distruttiva, assolutamente economica in quanto non necessita della preparazione di provini (al massimo è necessario lucidare una piccolissima porzione della superficie del pezzo) e tale da permettere un controllo qualità totale ed *on-line* sia per caratterizzare materiali approvvigionati sia per verificare pezzi finiti. E' inoltre estremamente flessibile in quanto è possibile pensare di applicare la testa indentatrice su macchine da banco, su end effector di bracci robotici o su attrezzature portatili appositamente pensate per interfacciarsi con determinate categorie di oggetti (pezzi di forma particolare, tubazioni, ecc...).



## 1.2 Dalla prova di indentazione alla curva di trazione

Come più esaurientemente descritto in (1), la caratterizzazione del materiale in esame avviene attraverso lo svolgimento di due distinti passaggi sequenziali:

- l'acquisizione della curva di indentazione  $L-h$  (carico applicato - profondità di penetrazione) per mezzo di un indentatore sferico strumentato;
- la trasformazione della curva di indentazione acquisita nella curva caratteristica del materiale  $\sigma - \epsilon$ , attraverso un software nel quale è implementato un apposito algoritmo di inversione (d'ora in avanti si intenderà per algoritmo di inversione quella procedura informatizzata che permette di visualizzare in uscita la curva di trazione del materiale una volta ricevuta in ingresso la curva di indentazione)

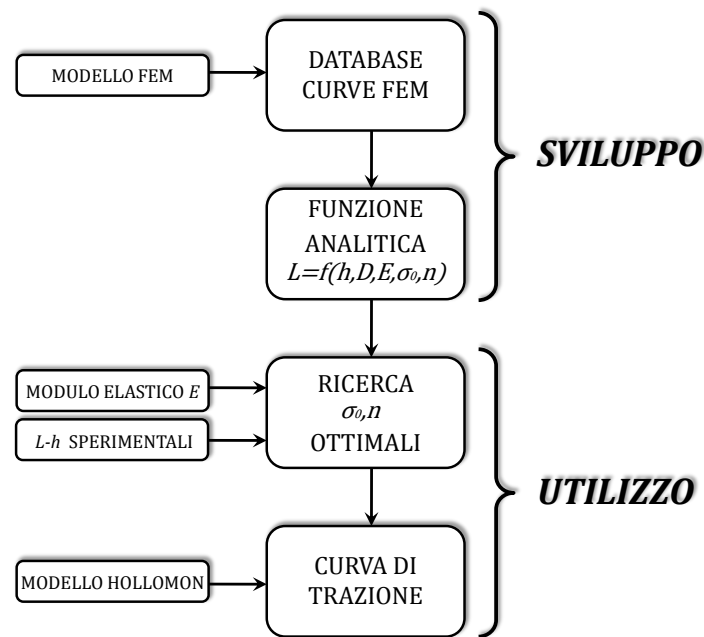


Figura 1.1: Algoritmo di inversione

Step sequenziali da percorrere per sviluppare ed utilizzare l'algoritmo di inversione

In fig.1.1 si riporta un diagramma che riassume tutte le fasi essenziali per lo sviluppo ed il successivo utilizzo dell'algoritmo.

Innanzitutto, come ipotesi fondamentale, si assumerà che il materiale indentato obbedisca alla legge costitutiva di Hollomon (1.1)

$$\sigma(\epsilon) = \begin{cases} E \cdot \epsilon & \text{se } \epsilon \leq \frac{\sigma_0}{E} \\ \sigma_0^{1-n} \cdot E^n \cdot \epsilon^n & \text{se } \epsilon \geq \frac{\sigma_0}{E} \end{cases} \quad (1.1)$$

Questo modello costitutivo è univocamente determinato una volta che siano fissati tre parametri: il modulo elastico  $E$ , la tensione di snervamento  $\sigma_0$  ed il coefficiente di incrudimento  $n$ .

Per quanto riguarda il modulo elastico  $E$ , lo si assumerà sempre come un dato di ingresso dell'algoritmo, ovvero si ipotizzerà di conoscerne il valore a priori. Questa ipotesi, a prima vista, sembra più penalizzante di quanto non sia in realtà: infatti, una volta nota la classe di appartenenza del materiale in esame, il modulo elastico noto anch'esso, in quanto è una grandezza che risente in misura ridottissima di tutte quelle operazioni chimiche e tecnologiche che vengono svolte abitualmente nell'ambito dei processi industriali.

Gli altri due parametri invece, ovvero  $\sigma_0$  ed  $n$ , sono il vero dato di output dell'intera analisi: il cuore dell'algoritmo è infatti rappresentato da una routine che, avuti in ingresso:

- i dati sperimentali
- una funzione analitica in grado di calcolare *teoricamente* l'andamento della curva  $L-h$ , nota che sia la legge costitutiva del materiale indentato
- il modulo elastico del materiale indentato

restituisce in uscita proprio la coppia di valori  $\sigma_0$  ed  $n$  che, inseriti nella funzione analitica, rendono la curva teorica  $L-h$  la più simile possibile alla curva sperimentale.

Da quanto detto, si capisce subito l'importanza di avere una funzione analitica della massima accuratezza possibile. E proprio la ricerca della miglior funzione analitica è l'elemento che ha assorbito, e probabilmente continuerà anche in futuro ad assorbire, la maggior quantità di tempo e risorse.

### 1.2.1 Sviluppo della funzione analitica

Data l'estrema complessità del fenomeno, pensare di sviluppare un modello fisico del fenomeno, ossia un modello che, sfruttando i risultati della meccanica dei materiali, riesca in qualche modo a prevedere l'influenza che i vari parametri in gioco hanno sull'andamento delle curve  $L-h$ , è abbastanza improponibile.

Benchè tentativi in questo senso siano stati compiuti(2), i risultati raggiunti non hanno infatti mostrato un livello di accuratezza accettabile. Il fenomeno infatti presenta un elevato livello di malcondizionamento *fisico*, nel senso che indentando materiali con comportamento a trazione sensibilmente differente non necessariamente si riscontra una differenza altrettanto evidente tra le curve di indentazione (vedi cap.3). Per questo motivo è necessario disporre di una rappresentazione analitica del fenomeno della massima precisione.

Nel corso di questi anni di sviluppo e ricerca si è pertanto giunti alla conclusione che la strada migliore da percorrere fosse quella basata sull'utilizzo di tecniche di regressione mediante le

quali, pur perdendosi un pò la fisica del fenomeno, si è riusciti ad raggiungere il livello di accuratezza richiesta e ad applicare con successo l'algoritmo di inversione per ottenere le curve  $\sigma$ - $\varepsilon$ .

Si è allora deciso di realizzare un accuratissimo modello agli elementi finiti del processo di indentazione e di simulare, mediante questo, l'andamento sperimentale delle curve di indentazione di un grande numero di materiali di Hollomon al variare dei tre parametri  $E$ ,  $\sigma_0$  ed  $n$  (fig.1.3).

Il passo successivo da compiere (fig.1.1) è l'utilizzo di questo vasto database numerico come

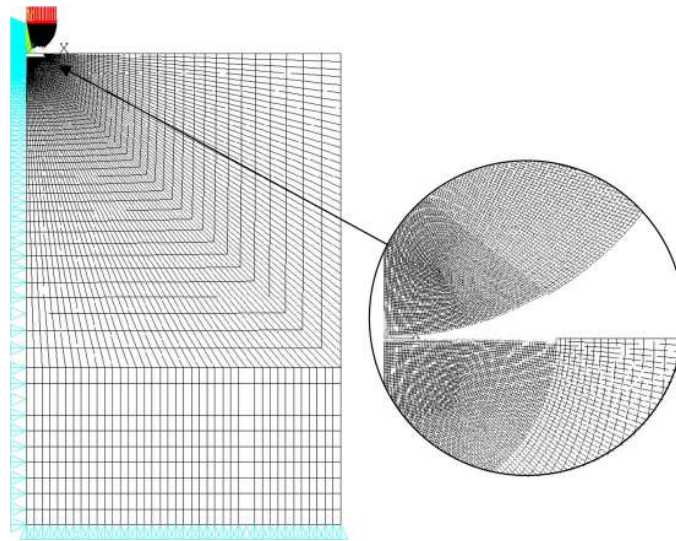


Figura 1.2: Modello FEM indentazione

Geometria del modello ad elementi finiti utilizzato per simulare il processo di indentazione

linea guida per mettere a punto la relazione analitica del tipo (1.2) in grado di legare tutte le variabili in gioco

$$L = f(h, D, E, \sigma_0, n) \quad (1.2)$$

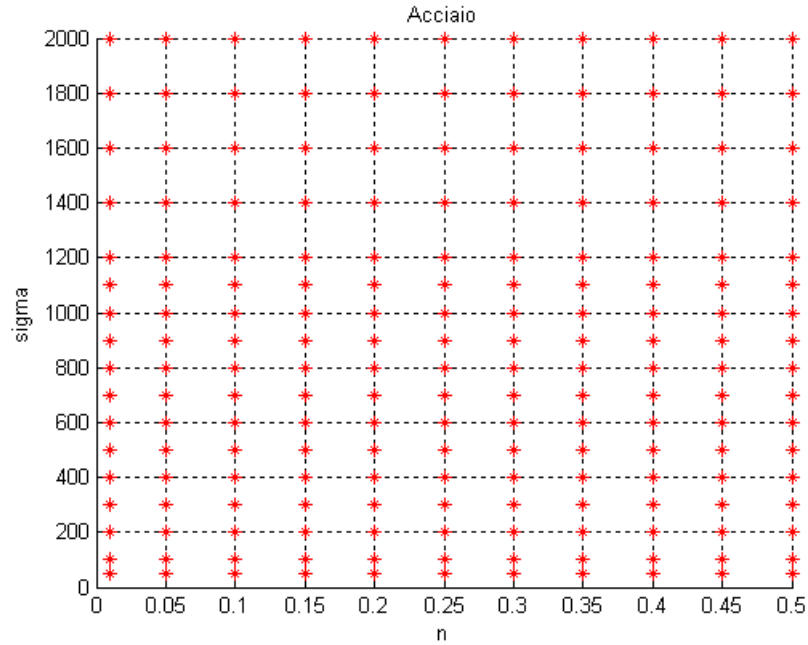
dove con  $D$  si intende il diametro dell'indentatore (tipicamente compreso tra 1 e 5 mm).

L'analisi di regressione si basa su due livelli di interpolazione:

1. ad un primo livello, si va ad interpolare la generica curva  $L^{(FEM)}-h^{(FEM)}$  con la funzione

$$\frac{L}{E \cdot D^2} = \sum_{k=1}^4 A_k \cdot \left(\frac{h}{D}\right)^{k/2} \quad (1.3)$$

I vari coefficienti  $A_k$  vengono calcolati in modo da minimizzare i quadrati degli scarti tra dati FEM e dati teorici.

Figura 1.3: Dominio FEM  $\sigma_0$ - $n$ 

Mappatura del dominio  $\sigma_0$ - $n$  per l'acciaio ( $E = 210GPa$ ) nelle simulazioni FEM

2. ad un secondo livello si ricerca un legame analitico tra i quattro coefficienti  $A_k$  ed i parametri del materiale  $\sigma_0$  ed  $n$  mediante la funzione

$$A_k = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \alpha_{ijk} \sigma_0^{i-1} n^{j-1} \quad (1.4)$$

Le quattro matrici 6x6  $\alpha_{ijk}$  sono ancora calcolate seguendo la logica dei minimi quadrati.

In definitiva, sostituendo la (1.4) nella (1.3) si ottiene:

$$\frac{L}{E \cdot D^2} = \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^6 \alpha_{ijk} \cdot \sigma_0^{i-1} n^{j-1} \left( \frac{h}{D} \right)^{k/2} \quad (1.5)$$

che altro non è se non la relazione del tipo (1.2) che ci si era prefissati di trovare.

Questa forma della funzione (1.2) ha subito una serie di modifiche essenzialmente legate alla volontà di minimizzare gli errori commessi nel ricostruire analiticamente il database FEM mediante la 1.5.

Al momento in cui questo lavoro di tesi è iniziato, la forma definitiva della funzione (1.2) era la seguente (vedi (3)):

- primo livello di interpolazione

$$\frac{h}{D} = \sum_{k=1}^4 B_k \cdot \left( \frac{L}{E \cdot D^2} \right)^{r_k} \quad (1.6)$$

- secondo livello di interpolazione

$$B_k = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \beta_{ijk} \left( \frac{\sigma_0}{U_1} \right)^{s_i} (n + U_2)^{s_j} \quad (1.7)$$

- forma completa

$$\frac{h}{D} = \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^6 \beta_{ijk} \cdot \left( \frac{\sigma_0}{U_1} \right)^{s_i} (n + U_2)^{s_j} \left( \frac{L}{E \cdot D^2} \right)^{r_k} \quad (1.8)$$

Rispetto all'espressione (1.5) si osservano tre differenze sostanziali:

1. è stato invertito il ruolo delle variabili dipendente ed indipendente. Ora è  $h$  la prima ed  $L$  la seconda
2. sono stati implementati due nuovi vettori di esponenti  $s_{i(j)}$  ed  $r_k$  in luogo degli esponenti interi presenti nella (1.5)
3. sono stati introdotti i coefficienti  $U_1$  ed  $U_2$

Con questa nuova formula, la precisione con la quale il modello analitico riesce a riprodurre i dati FEM è cresciuta molto e con essa la capacità del software di riprodurre correttamente la reale curva  $\sigma - \varepsilon$  del materiale indentato.

Una volta in possesso dell'equazione 1.8, si può finalmente procedere ad utilizzarla allo scopo di ottenere in uscita dal software i parametri  $\sigma_0$  ed  $n$  una volta forniti in ingresso i vettori  $L$  ed  $h$  sperimentali.

Con questo, si conclude la parte riguardante lo *sviluppo* dell'algoritmo ed inizia la fase di *utilizzo* al fine di raggiungere l'obiettivo finale, ossia visualizzare la curva  $\sigma - \varepsilon$  del materiale, nota la curva  $L-h$

### 1.2.2 Ricerca dei parametri $\sigma_0$ - $n$ ottimali

Una volta ottenuta una certa forma della (1.2), la si può utilizzare per effettuare esattamente il processo inverso: fissata la classe del materiale, ovvero il modulo elastico  $E$ , la curva di indentazione sperimentale  $L^{(exp)}-h^{(exp)}$  viene iterativamente confrontata con la curva teorica

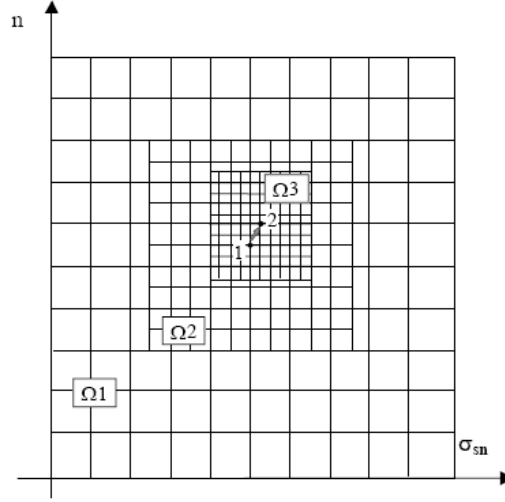


Figura 1.4: Ricerca minimo  $\chi$   
Schema della ricerca del minimo valore della norma di distanza  $\chi$

dell'espressione (1.8) al variare dei parametri  $\sigma_0$  ed  $n$  secondo la norma quadratica di distanza

$$\chi(E, \sigma_0, n) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[ h^{(th)} \left( L_m^{(exp)}, E, \sigma_0, n \right) - h_m^{(exp)} \right]^2 \quad (1.9)$$

dove  $M$  è il numero di punti acquisiti durante il processo di indentazione e che costituiscono la curva sperimentale.

I parametri caratteristici del materiale  $\sigma_0$  ed  $n$  variano su un dominio discreto che si infittisce progressivamente all'avvicinarsi della soluzione di minimo per la norma  $\chi$ : si svolge, in pratica, una tecnica di inversione tipicamente adottata dagli algoritmi di ottimizzazione. La figura 1.4 riporta uno schema intuitivo della procedura inversa: il dominio  $\Omega$  dei parametri  $\sigma_0$  ed  $n$  riduce iterativamente la propria estensione ed il passo di discretizzazione all'avvicinarsi della soluzione.

Il minimo assoluto della norma  $\chi$  identifica la coppia di valori ottimali  $\sigma_0$ - $n$  che, inseriti nella (1.1), permette di visualizzare la curva di trazione del materiale.

## 1.3 Obiettivi della tesi

Obiettivo di questa tesi è essenzialmente la continuazione della ricerca impostata e sviluppata nell'arco di questi anni riguardante tutti gli aspetti dell'algoritmo di inversione.

In particolare, si vuol cercare di apportare migliorie sia alla funzione analitica sia pure al vero e proprio algoritmo di ricerca della miglior coppia  $\sigma_0$ - $n$ .

Si è notato infatti che esistono zone del dominio  $\sigma_0$ - $n$  che sono mal-riprodotte dalla funzione

analitica, e ciò si ripercuote ovviamente in modo molto negativo sul risultato fornito dall'algoritmo.

D'altra parte, esistono anche situazioni nelle quali, anche a fronte di una eccellente ricostruzione teorica da parte della funzione analitica dell'andamento delle curve  $L-h$ , l'algoritmo fornisce comunque un risultato grossolanamente errato. Si procederà dunque a valutare e correggere le cause di tali errori.

Un altro obiettivo fondamentale di questo lavoro, che esula dallo sviluppo dell'algoritmo di inversione, consiste nel mettere a punto una nuova procedura di azzeramento dei dati sperimentali. L'azzeramento è infatti un'operazione estremamente critica per la buona caratterizzazione del materiale analizzato, soprattutto a causa del già citato malcondizionamento del fenomeno. E' pertanto necessario mettere a punto una tecnica di azzeramento che sia la più accurata e ripetibile possibile, senza peraltro gravare in modo eccessivo sul costo computazionale globale. Infine, sarà analizzato e, sotto alcuni aspetti, migliorata la procedura che permette l'esame di materiali anche non di Hollomon attraverso una opportuna combinazione delle differenti curve di Hollomon restituite in uscita dall'algoritmo di inversione a seguito dell'analisi di differenti porzioni della curva di indentazione sperimentale, procedura denominata Analisi Progressiva.

# Capitolo 2

## Procedura di Inversione

### 2.1 Applicazione al database di curve FEM

In questa sede si procede all'applicazione della procedura di inversione (d'ora in avanti abbreviata con l'acronimo IP) al database di curve  $L$ - $h$  ottenute mediante le simulazioni agli elementi finiti del processo di indentazione.

Si consideri la funzione 1.8, di seguito riproposta:

$$\frac{h}{D} = \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^6 \beta_{ijk} \cdot \left( \frac{\sigma_0}{U_1} \right)^{s_i} (n + U_2)^{s_j} \left( \frac{L}{E \cdot D^2} \right)^{r_k}$$

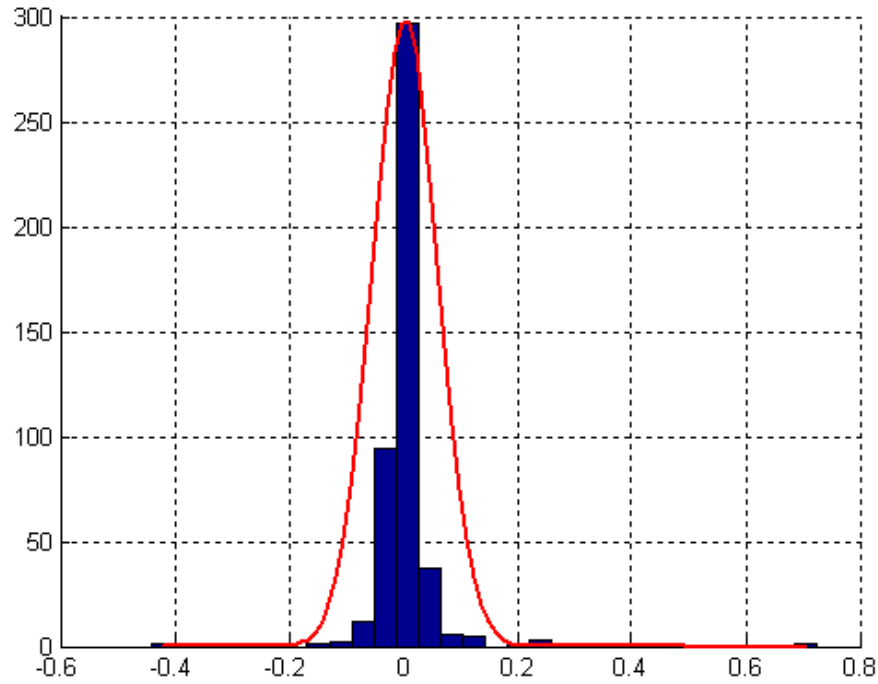
In sostanza, si tratta confrontare la curva  $h^{(th)}(L^{(FEM)})$ , ottenuta inserendo nella 1.8 una certa coppia di valori  $\sigma_0$ - $n$ , con i dati sperimentali ottenuti dalla prova, dati sperimentali che nel caso in esame sono rappresentati dai valori  $L^{(FEM)}$ - $h^{(FEM)}$ . Tale confronto è effettuato attraverso il calcolo della norma di distanza  $\chi$  sulla base della relazione 1.9 di seguito riportata con le opportune modifiche:

$$\chi(E, \sigma_0, n) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[ h^{(th)}(L_m^{(FEM)}, E, \sigma_0, n) - h_m^{(FEM)} \right]^2$$

Dopo aver mappato un certo dominio, si va alla ricerca della coppia  $\sigma_0$ - $n$  che minimizza tale norma di distanza, per poi procedere, come illustrato nel paragrafo 1.2.2, ad una nuova ricerca su di un dominio di estensione e passo di campionamento inferiori. Si ripete questa procedura un certo numero di volte, fino al raggiungimento del passo di campionamento desiderato.

D'altra parte, per ogni curva  $L^{(FEM)}$ - $h^{(FEM)}$  sono noti, in quanto imposti a priori, i valori esatti di  $\sigma_0$  ed  $n$ , per cui è possibile effettuare un confronto tra questi ed i medesimi parametri forniti in uscita dalla IP.



Figura 2.1: Istogramma  $\Delta\sigma_0/\sigma_0$ 

Pertanto, si può ad esempio calcolare, per ogni curva FEM del database, il parametro:

$$E_\sigma = \frac{\sigma_0^{IP} - \sigma_0^{FEM}}{\sigma_0^{FEM}} \quad (2.1)$$

che rappresenta l'errore relativo di stima della tensione di snervamento.

Riportando in un istogramma (fig.2.1) l'andamento di tale indice, si vede abbastanza chiaramente che assume un comportamento tipico della distribuzione normale. In particolare, i valori di media e deviazione standard risultano pari a 0.0035 e 0.0572. Ciò significa che, applicando questo algoritmo di inversione, inteso sia come funzione interpolante che come procedura di ricerca di  $\sigma_0$  ed  $n$ , e fissando il livello di confidenza al 99%, si può concludere che:

$$-14.4\% \leq \frac{\Delta\sigma_0}{\sigma_0} \leq 15.1\%$$

Di primo impulso, verrebbe da applicare questo ragionamento anche per quantificare l'errore commesso nella stima del coefficiente di incrudimento, e quindi porre:

$$E_n = \frac{n^{IP} - n^{FEM}}{n^{FEM}} \quad (2.2)$$

In realtà ciò risulterebbe piuttosto fuorviante. Si osservino infatti le curve  $\sigma$ - $\epsilon$  riportate in

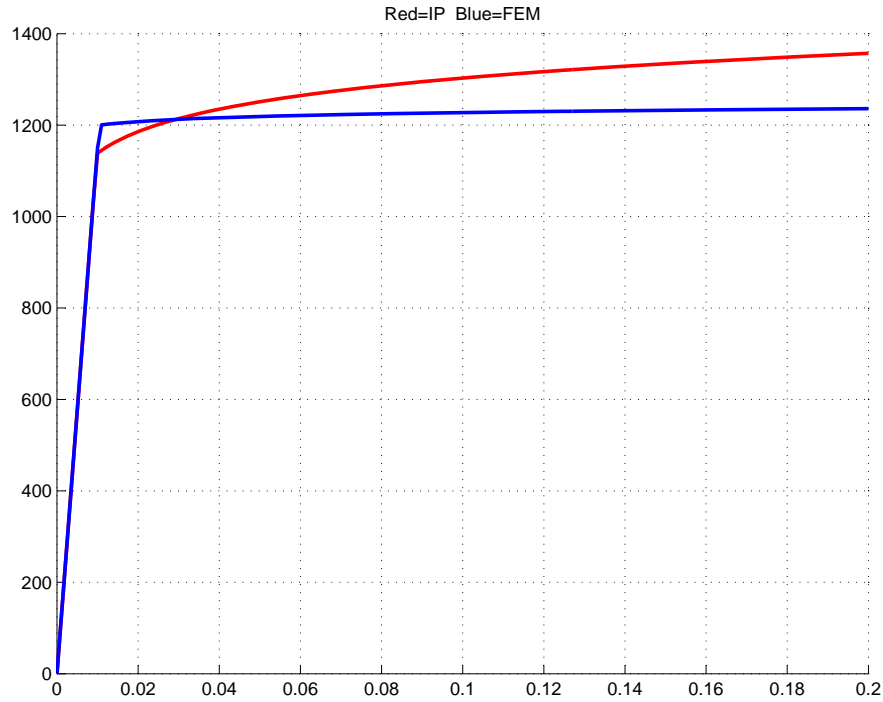


Figura 2.2: Curve  $\sigma$ - $\epsilon$  corrispondenti a:  $E=115$  GPa,  $\sigma_0^{FEM}=1200$  MPa,  $n^{FEM}=0.01$

fig.2.2 e 2.3.

Ad un controllo puramente visivo, nessuna delle due risulta particolarmente entusiasmante, ma se si dovesse indicare quale delle due risulta migliore, senz'altro si indicherebbe quella di fig.2.2. Ebbene, per questa, l'errore relativo di stima del coefficiente di incrudimento risulta pari al 486%, ovvero c'è una sovrastima di quasi un fattore 6. Nel caso invece di fig.2.3, l'errore relativo commesso nella stima di  $n$  è circa pari a -25%. Si capisce dunque come questo indice di valutazione non sia ben rappresentativo del fenomeno e come conduca a conclusioni non coerenti con la realtà dei fatti.

Per qualificare in qualche modo la capacità dell'algoritmo di riprodurre correttamente il comportamento a trazione del materiale si fa allora uso di un altro indice, che contempla tutto l'andamento della curva  $\sigma$ - $\epsilon$  stessa. Tale indice è così calcolato:

$$E_{\sigma\epsilon} = \frac{1}{\epsilon_{max}} \int_0^{\epsilon_{max}} \frac{|\sigma^{IP}(\epsilon) - \sigma^{FEM}(\epsilon)|}{\sigma^{FEM}(\epsilon)} d\epsilon \quad (2.3)$$

Si consideri ad esempio la coppia di curve  $\sigma$ - $\epsilon$  riportata in figura 2.3.

In fig.2.4 è riportato l'andamento della funzione integranda la quale rappresenta, per ogni valore di  $\epsilon$ , l'errore relativo commesso nella valutazione della tensione  $\sigma$ . Pertanto, la funzione 2.3 rappresenta l'errore relativo medio nel dominio zero- $\epsilon_{max}$ , dove  $\epsilon_{max}$  è posto pari a 0.15.

Per il caso in esame,  $E_{\sigma\epsilon}$  è pari a 0.123, ed è anche il valore massimo riscontrato nell'intero

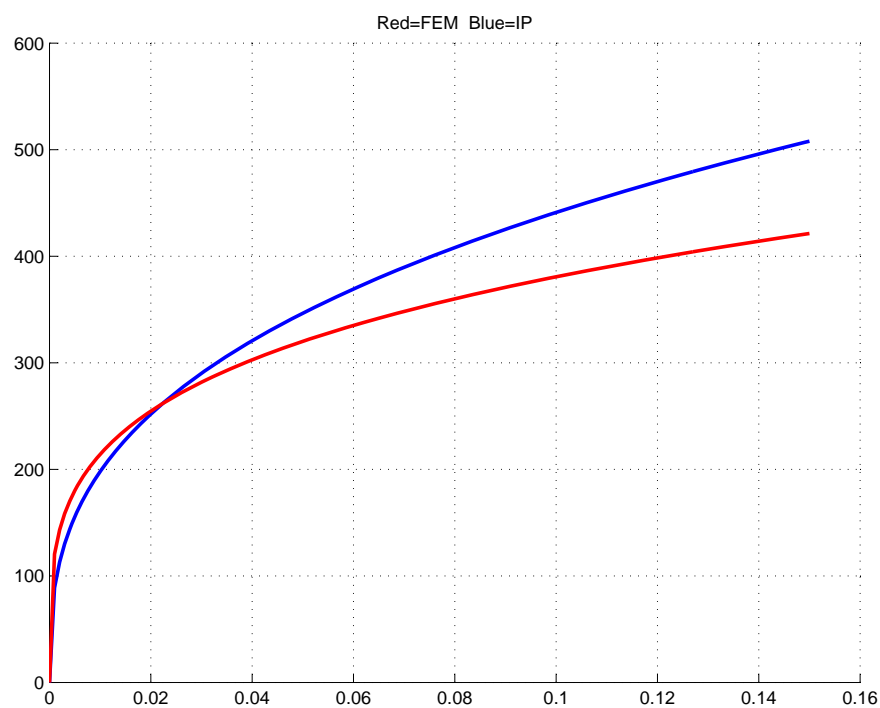


Figura 2.3: Curve  $\sigma$ - $\epsilon$  corrispondenti a:  $E=210$  GPa,  $\sigma_0^{FEM}=100$  MPa,  $n^{FEM}=0.25$

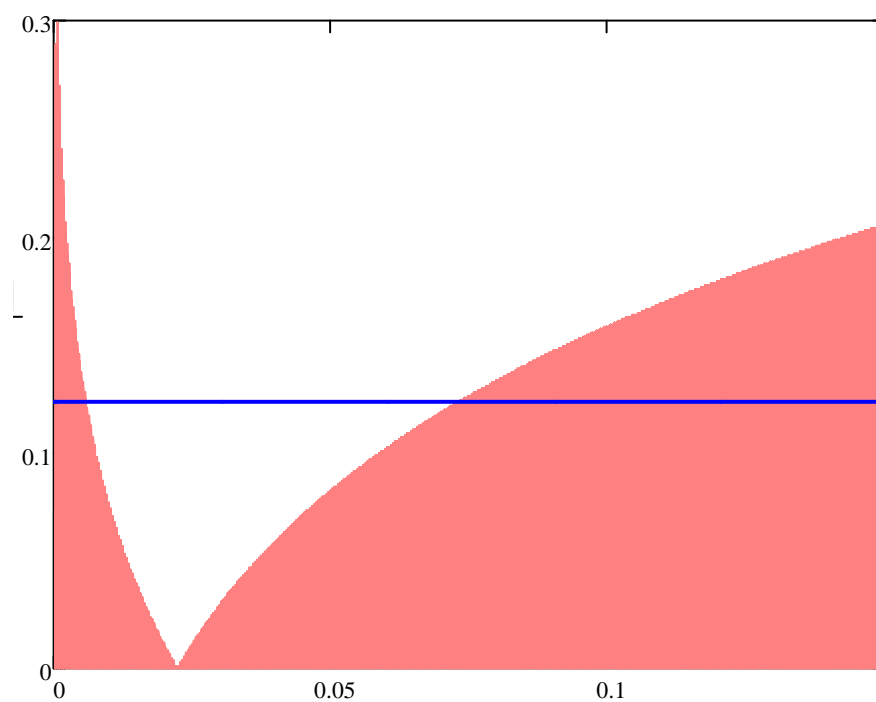


Figura 2.4: Valore assoluto della differenza tra le curve di trazione di fig.2.3

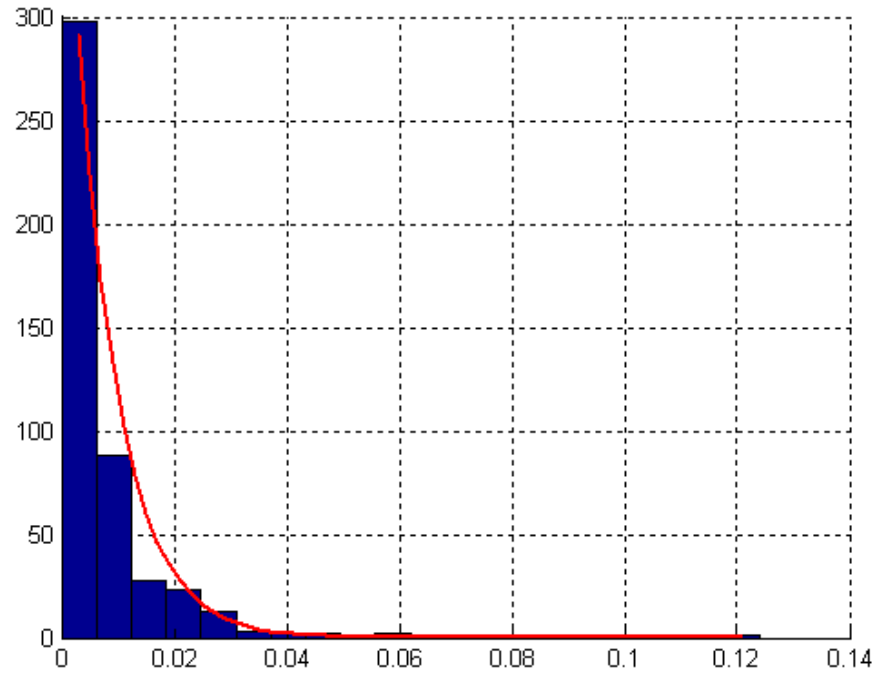


Figura 2.5: Istogramma Errore relativo medio di stima delle curve di trazione

database di curve FEM, mentre nel caso di fig.2.2 risulta pari a 0.07, valore non entusiasmante, ma neppure da buttare come invece il calcolo di  $E_n$  avrebbe lasciato pensare. Da qui si vede la maggior coerenza di questo parametro con la realtà dei fatti.

Si può a questo punto pensare di studiare l'andamento di questo indice per ogni curva del database, e riportarne il valore in un istogramma, come già visto a proposito dell'errore di stima della tensione di snervamento. Il risultato è proposto in fig.2.5.

A differenza del caso precedente, però,  $E_{\sigma\epsilon}$  è definito solamente nei reali positivi per cui, per modellarne matematicamente l'andamento si deve far uso di una distribuzione avente anch'essa dominio nei reali positivi.

Una possibile scelta è rappresentata dalla distribuzione esponenziale, definita come:

$$f(x) = \vartheta \cdot e^{-\vartheta x} \quad (2.4)$$

dove  $\vartheta$  non è altro che l'inverso della media dei valori assunti da  $E_{\sigma\epsilon}$ , media che nel caso in esame risulta pari a 0.0076. La funzione di ripartizione della distribuzione (2.4) è calcolabile analiticamente e vale:

$$F(x) = 1 - e^{-\vartheta x} \quad (2.5)$$

Pertanto si può immediatamente calcolare il valore della cumulata per un dato livello di confidenza. Ad esempio, al 99%,  $E_{\sigma\epsilon}$  sarà compreso tra zero e 0.035. In definitiva, per

valutare quantitativamente la qualità dell'algoritmo di inversione si farà in seguito uso di due indici: la deviazione standard della distribuzione dell'errore relativo di stima della tensione di snervamento (la media dovrà sempre essere molto prossima a zero) e la media della distribuzione di  $E_{\sigma\varepsilon}$ .

## 2.2 Difetti della procedura di inversione

I risultati appena ottenuti sono certamente ragguardevoli, tuttavia il livello di precisione raggiunto è ancora insufficiente soprattutto in ottica di applicare questa struttura analitica all'analisi progressiva.

Senza andare a stravolgere completamente l'algoritmo, in questo e nei prossimi due capitoli si vedrà come i margini di miglioramento siano assolutamente ampi e tali da portare ad un livello di accuratezza adeguato per i nostri scopi.

Gli interventi possibili riguardano:

- modifiche alla procedura di ricerca della coppia  $\sigma_0$ - $n$  ottimale
- modifiche alla funzione interpolante 1.8

In questo capitolo si approfondirà il primo aspetto, mentre nei prossimi due si svilupperà il secondo.

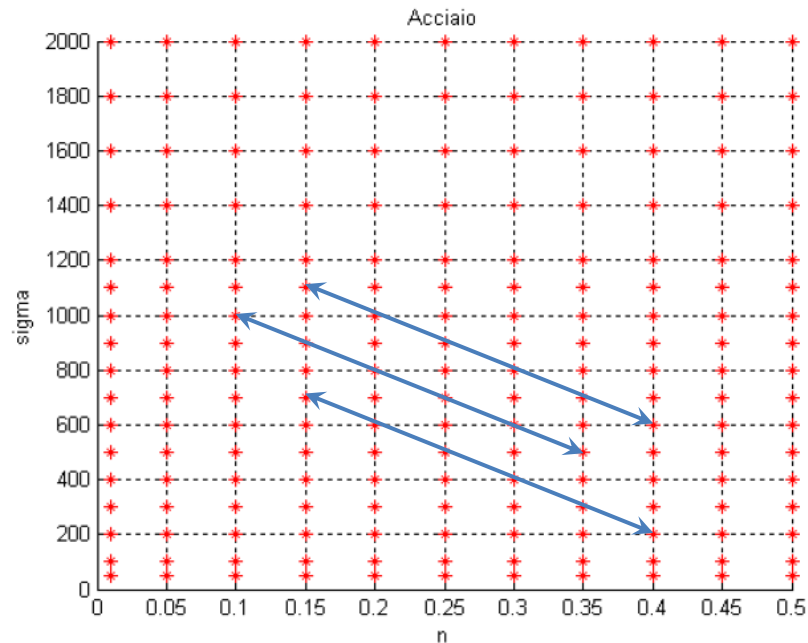
Nella sua versione iniziale, la procedura di inversione è così strutturata:

1. mappatura del dominio  $\sigma_0$ - $n$  con una griglia 45x45 e calcolo, per ogni punto, della norma di distanza  $\chi$
2. ricerca del punto cui corrisponde il minimo valore di  $\chi$
3. nuova mappatura attorno a tale punto, ancora con una griglia 45x45, di un dominio avente estensione pari a due volte il passo di campionamento iniziale

Dal punto di vista logico non c'è niente da obiettare, ma è sotto l'aspetto pratico che sorgono dei problemi. Si consideri infatti la fig.2.6.

Si è notato che, muovendosi nelle direzioni indicate dalle frecce, il valore di  $\chi$  tra curve  $L^{(FEM)}-h^{(FEM)}$  consecutive tende ad essere molto basso. Ciò è dovuto al fatto che, muovendosi in quelle direzioni, ad aumenti di  $\sigma_0$  corrispondono diminuzioni di  $n$  e viceversa, per cui i due effetti tendono in qualche modo a compensarsi dando luogo a comportamenti meccanici molto simili nei confronti dell'indentazione <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>In (2) si dimostra che, qualitativamente, un aumento del coefficiente di incrudimento corrisponde ad un aumento della curvatura (verso il basso), mentre un aumento della tensione di snervamento provoca una diminuzione della pendenza media della curva di indentazione (quindi un aumento di rigidità). In effetti, se si va ad osservare il comportamento delle curve, questo comportamento è verificato.

Figura 2.6: Dominio FEM  $\sigma_0-n$ 

Mappatura del dominio tensione di snervamento - coefficiente di incrudimento per l'acciaio nelle simulazioni FEM

Questa circostanza fa sì che, allorchè si opera la prima mappatura del dominio alla ricerca del minimo valore di  $\chi$ , ci sarà una regione particolarmente malcondizionata, di estensione ragguardevole, dove il valore di  $\chi$  tende a variare molto poco rispetto a tutto il resto del dominio. Per chiarire meglio il concetto, in fig.2.7 e 2.8 si riporta l'andamento di  $\chi(\sigma_0, n)$  dopo la prima mappatura per un acciaio di Hollomon avente  $\sigma_0 = 1600$  MPa ed  $n = 0.1$ . In questi grafici, per facilitare la visualizzazione della regione di interesse, si è posto il valore di  $\chi$ , laddove ne risulta superiore, pari ad un certo valore di soglia ( $10^{-5}$  in questo caso). Ciò aiuta a mettere molto bene in evidenza la regione interessante nella quale andare alla ricerca del minimo assoluto. In particolare, in fig.2.7 viene messo in risalto il basso gradiente di  $\chi$  in quella che potremmo definire “fascia critica”, mentre in fig.2.8 si vuole evidenziarne il posizionamento trasversale nel dominio e soprattutto la grande estensione.

Il problema più grande causato dalla presenza di questa regione mal-condizionata è che, mappando in modo discreto il dominio, può capitare benissimo che l'algoritmo finisca con il convergere verso un minimo fittizio, che può anche essere molto lontano dal minimo assoluto, reso tale solamente dalla campionatura non continua del dominio, cosicchè i successivi steps di infittimento risultino del tutto inutili.

Detto questo, diverse possibilità si parano di fronte: si potrebbe effettuare una mappatura più fitta già dal primo step, ma questo aumenta esponenzialmente i tempi di calcolo (fig.2.9), senza

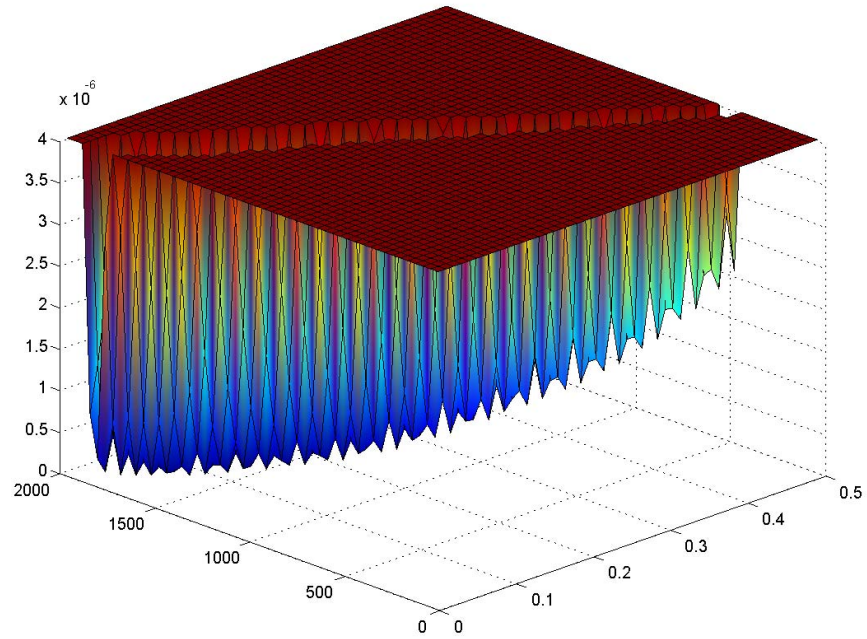


Figura 2.7: Andamento della funzione  $\chi(\sigma_0, n)$  per un materiale avente  $E=210$  GPa,  $\sigma_0=1600$  MPa,  $n=0.1$

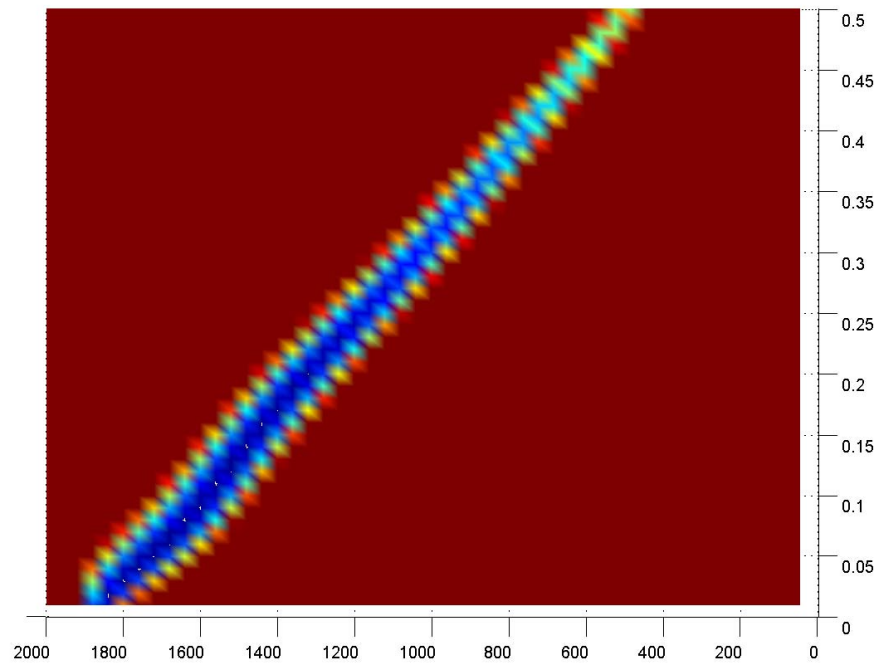


Figura 2.8: Andamento della funzione  $\chi(\sigma_0, n)$  per un materiale avente  $E=210$  GPa,  $\sigma_0=1600$  MPa,  $n=0.1$

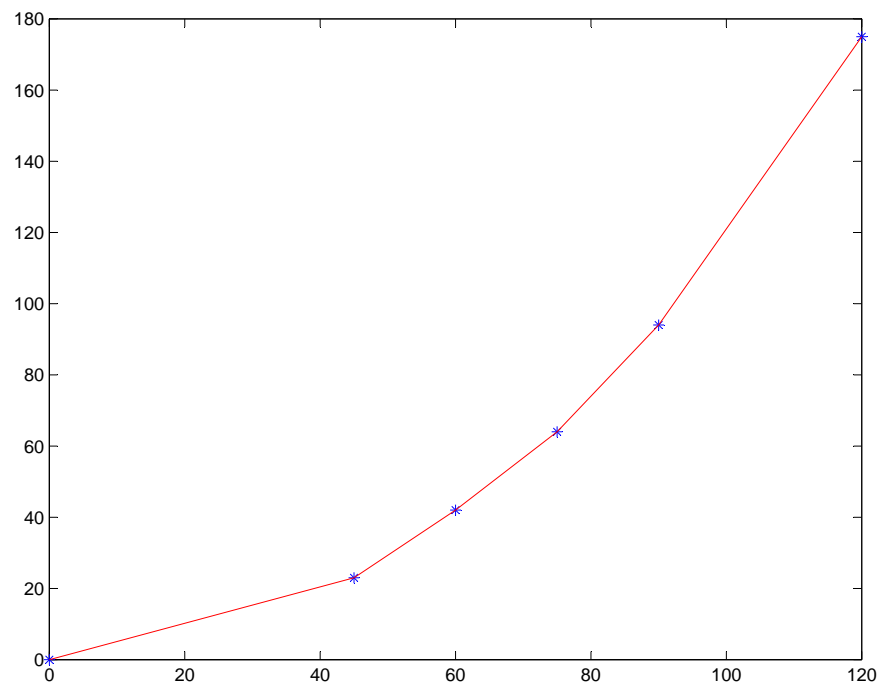


Figura 2.9: Tempo di calcolo in funzione del numero di suddivisioni del dominio

peraltro aumentare in modo apprezzabile la precisione; si potrebbe abbracciare una regione più ampia per ogni infittimento successivo al primo, ma anche in questo caso, prima di arrivare ad un passo di campionamento adeguato, servirebbero molti più steps, e quindi molto più tempo.

L'idea è stata allora di adattare l'algoritmo di ricerca alla forma della "scodella", ovvero si è cercato di studiare un sistema che permettesse di effettuare una ricerca molto accurata solamente nella zona del dominio dove in effetti esiste la possibilità di trovare il minimo assoluto.

## 2.3 Nuova Inverse Procedure

Visto il forte malcondizionamento presente nella zona interessante, non ci si può fidare del valor minimo trovato con la prima mappatura. E' allora opportuno cercare di infittire la ricerca in tutta la fascia blu di fig.2.8. Per fortuna, si è riscontrato che la zona dove si trovano i minimi valori di  $\chi$  taglia sì in modo trasversale il dominio, ma lo fa sempre in modo rettilineo, almeno in prima approssimazione. Per cui si è pensato di sfruttare questa circostanza. A livello pratico, dopo una prima mappatura nell'intero dominio, svolta esattamente come visto in precedenza, con l'unica differenza di un leggero infittimento della griglia portata da 45x45 a 50x50, si va alla ricerca non del minimo valore, bensì di un insieme di valori minimi (fig.2.10).

Una volta noti i punti del dominio cui corrispondono tali minimi, è possibile interpolarli con una retta dei minimi quadrati la quale sarà la base per la costruzione del dominio ridotto entro



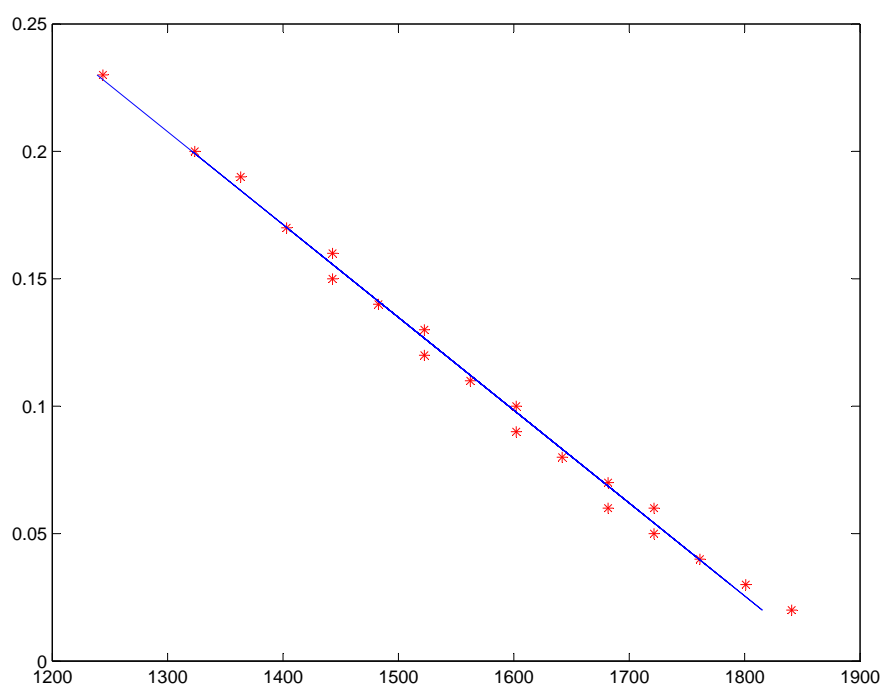


Figura 2.10: Posizione dei 15 più piccoli valori assunti dalla norma  $\chi$  nel dominio

cui effettuare l'accurata ricerca del minimo valore di  $\chi$  (fig.2.11).

Infatti, note intercetta e pendenza di questa retta e fissata una forchetta di variazione per  $\sigma_0$ , forchetta posta pari a 100 MPa, si può costruire l'insieme di punti del dominio in cui effettuare l'ulteriore ricerca. Per sicurezza, inizialmente in direzione del coefficiente di incrudimento  $n$  si abbraccerà l'intera estensione del dominio, per poi andarlo a restringere in un terzo step di ricerca.

Per quanto riguarda il numero di punti utilizzati per costruire la retta guida, è bene non esagerare in quanto, nel caso se ne prenda troppi, si generano dei problemi in corrispondenza dei bordi del dominio. Nella versione finale dell'algoritmo, tale numero è stato fissato pari a 15.

Una volta determinata la geometria del nuovo dominio, è possibile partire con la ricerca del minimo (fig.2.12 e 2.13), esattamente con gli stessi criteri utilizzati dal vecchio algoritmo. Nel caso in esame ad esempio, oltre alla prima mappatura che di fatto serve solo a identificare la geometria del dominio ridotto entro cui effettuare la ricerca, si procede a due step di calcolo con griglia 100x50 nel primo (100 in direzione di  $n$ ) e 50x50 nel secondo (questo secondo step si articola su un dominio avente estensione di 50 MPa in direzione  $\sigma_0$  e 0.1 in direzione  $n$ ).

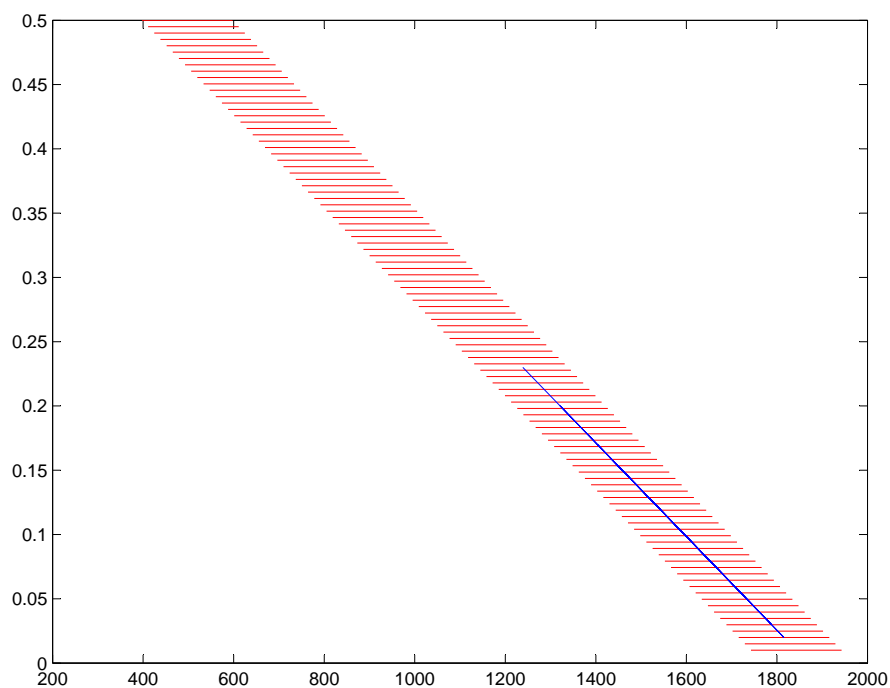


Figura 2.11: Costruzione del dominio ridotto entro cui ricercare il minimo assoluto di  $\chi$

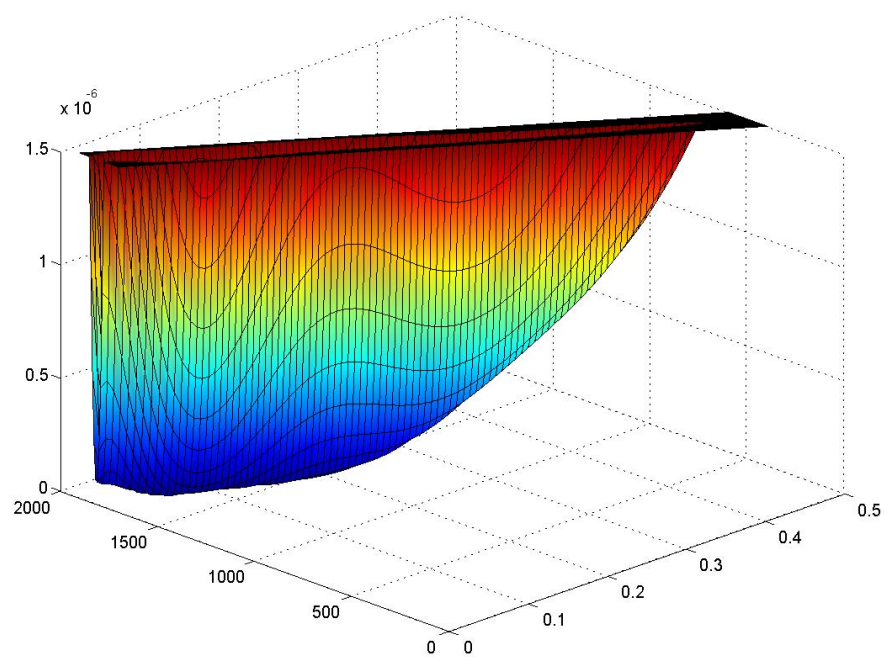


Figura 2.12: Andamento della funzione  $\chi(\sigma_0, n)$  nel dominio ridotto

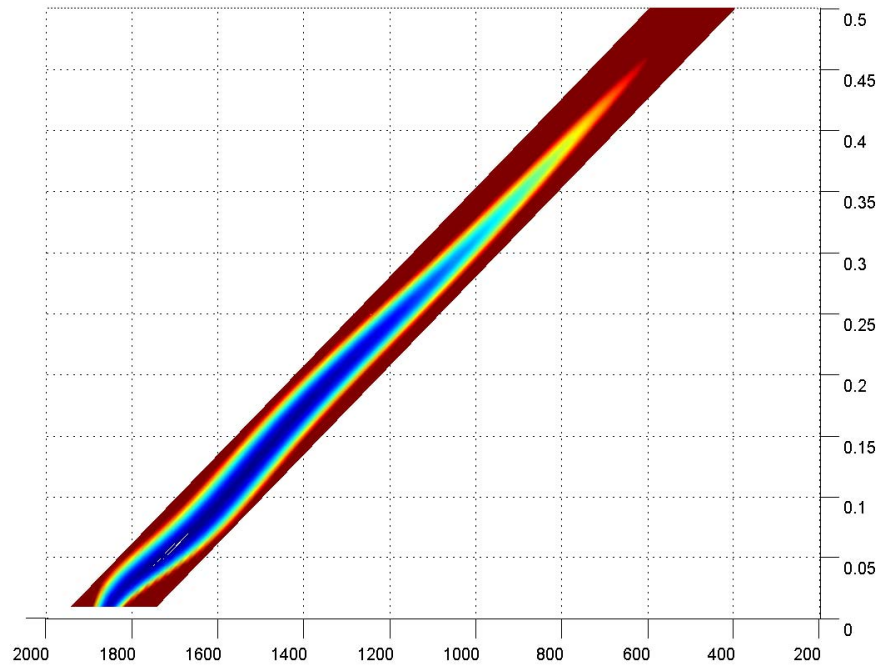


Figura 2.13: Andamento della funzione  $\chi(\sigma_0, n)$  nel dominio ridotto

## 2.4 Risultati conseguiti

Attraverso i due indici definiti al paragrafo 2.1, si passa a valutare l'effetto complessivo di questa importante modifica.

Il parametro  $E_\sigma$  risulta distribuito come mostrato in fig.2.14.

L'andamento è ancora quello tipico di una distribuzione gaussiana, ma stavolta i valori di media e deviazione standard sono rispettivamente scesi da 0.0035 a 0.0018 e da 0.0572 a 0.0231. Quindi la media si leggermente avvicinata a zero, mentre la deviazione standard è calata di oltre tre punti percentuali. Ciò significa che, al 99% di confidenza si avrà:

$$-5.6\% \leq \frac{\Delta \sigma_0}{\sigma_0} \leq 6.3\%$$

Il beneficio ottenuto è dunque molto consistente.

Per quanto riguarda invece l'altro indice di qualità, ossia  $E_{\sigma\epsilon}$ , la sua distribuzione è quella riportata in fig.2.15.

Il valore della media è sceso da 0.0076 a 0.0057, cosicché, al 99%,  $E_{\sigma\epsilon}$  è compreso tra zero e 0.026. Per rendersi conto del significato di questi numeri, in fig.2.16 e 2.17 si riportano i confronti tra le curve di trazione reali e stimate rispettivamente per  $E_{\sigma\epsilon}$  massima ed  $E_{\sigma\epsilon}$  pari a 0.0259 (il valore più prossimo a 0.026 trovato nel database).

Rispetto al caso mostrato in fig.2.3, è facilmente visibile l'incremento di precisione ottenuto.

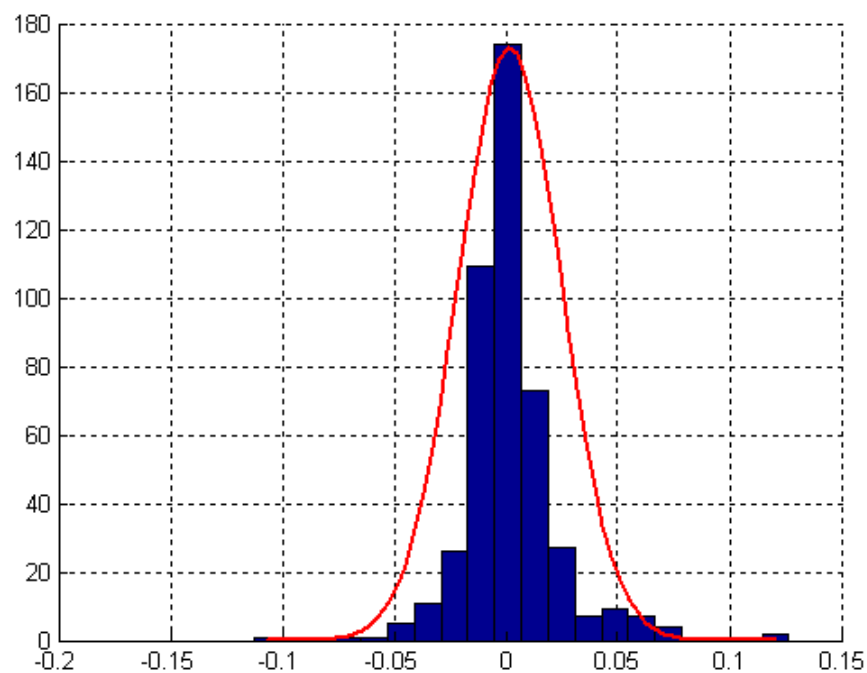
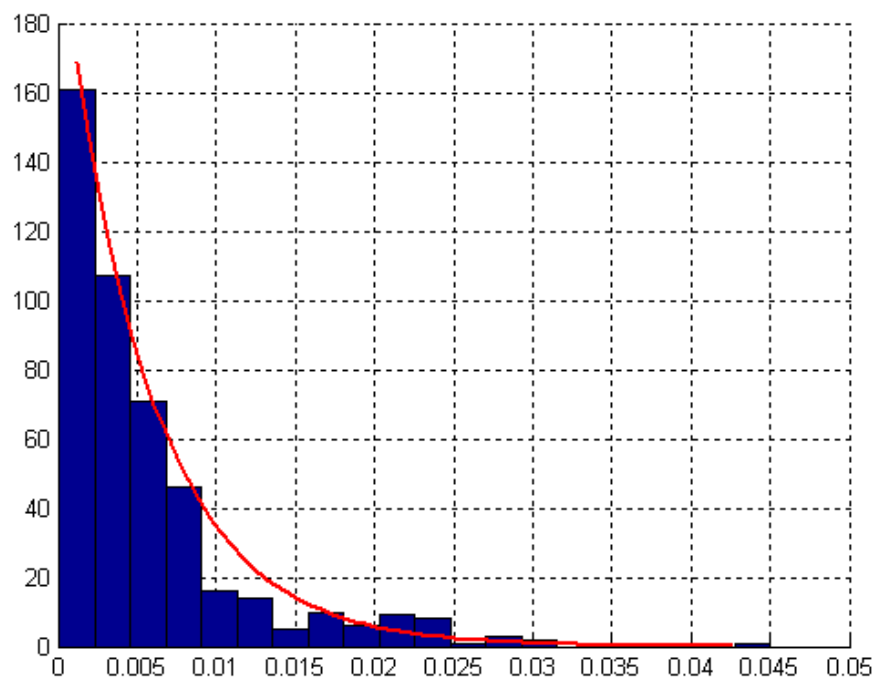
Figura 2.14: Istogramma  $\Delta\sigma_0/\sigma_0$ 

Figura 2.15: Istogramma Errore relativo medio di stima delle curve di trazione

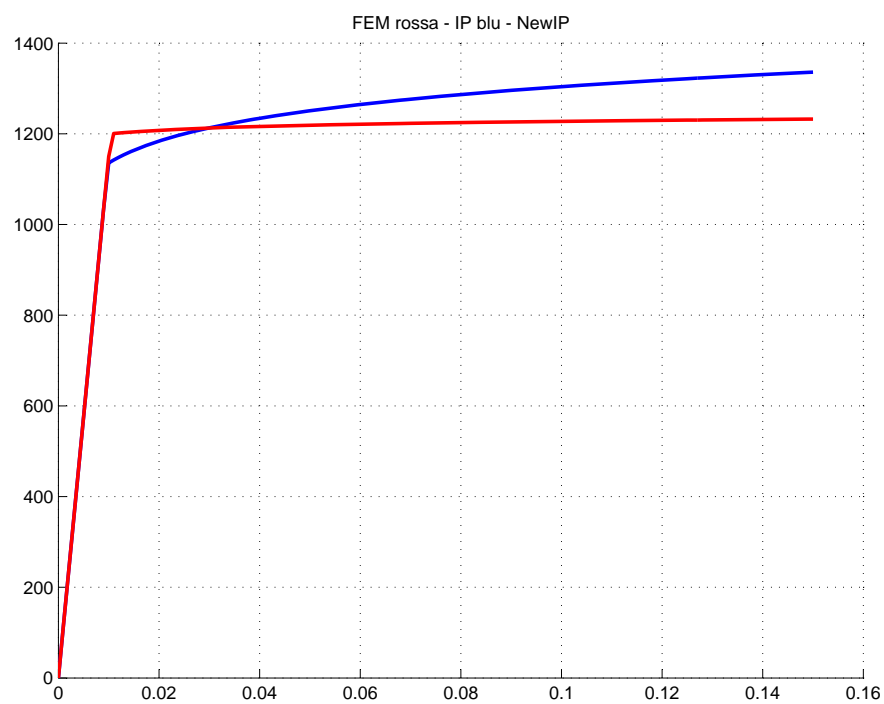


Figura 2.16: Curve di trazione reale stimata corrispondenti al massimo valore di  $E_{\sigma\epsilon}$

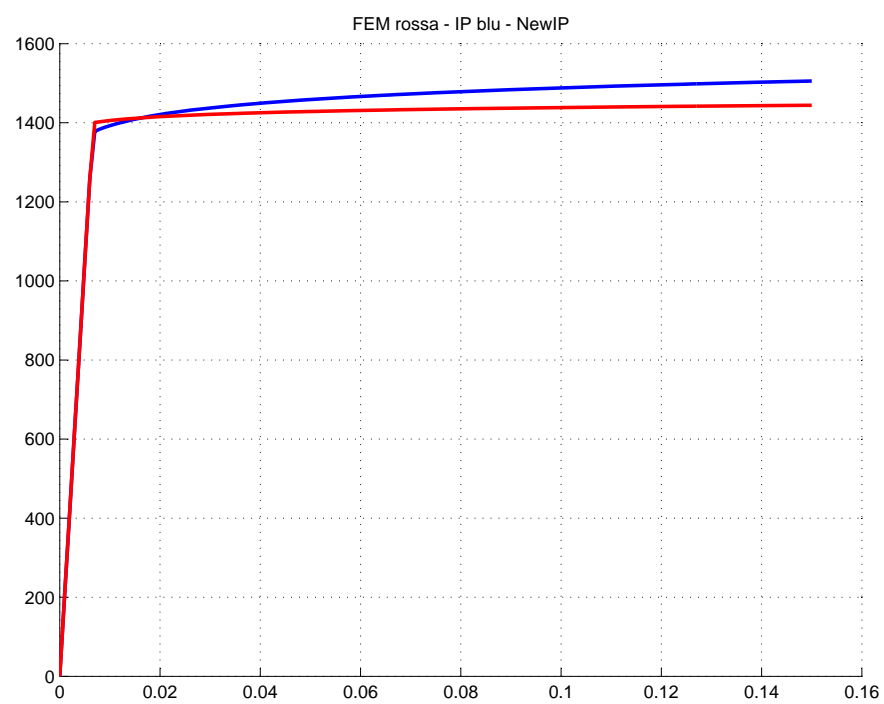


Figura 2.17: Curve di trazione reale stimata corrispondenti a  $E_{\sigma\epsilon}=0.0259$

---

Con questo si conclude la fase di sviluppo della nuova Inverse Procedure e si passano ad analizzare invece le possibili migliorie apportabili alla funzione 1.8 al fine di incrementare ulteriormente il livello di accuratezza dell'intero algoritmo.

# Capitolo 3

## Funzione Interpolante

### 3.1 Calcolo dei coefficienti $B_k$ e $\beta_{ijk}$

Nel capitolo precedente è stata svolta una trattazione che può risultare un pò fuorviante, nel senso che i dati FEM di tutte e tre le classi di materiali sono stati trattati come un unico insieme di curve. In realtà, preme affermare che di funzioni come la 1.8 ne esistono tre, una per ogni valore del modulo elastico  $E$ , il quale rappresenta un input del modello. Ad ogni valore di  $E$  resta univocamente associato un determinato array  $\beta_{ijk}$  di coefficienti numerici. Ora, al fine di evidenziare alcune problematiche relative alle relazioni (1.6) e (1.7), si proverà a calcolarne i coefficienti numerici associati al database di curve FEM dell'acciaio.

Si consideri dapprima la funzione (1.6), la si applichi all'insieme di curve  $h^{(FEM)} - L^{(FEM)}$  dell'acciaio e si calcoli, per ogni valore di  $\sigma_0$  ed  $n$  della griglia di fig.1.3, il vettore dei minimi quadrati  $B = B_k$  con  $k = 1, \dots, 4$  mediante il Normal Equation Method (NEM):

$$\begin{pmatrix} \frac{h_1}{D} \\ \frac{h_2}{D} \\ \vdots \\ \frac{h_m}{D} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{L_1}{E \cdot D^2}\right)^{r_1} & \left(\frac{L_1}{E \cdot D^2}\right)^{r_2} & \left(\frac{L_1}{E \cdot D^2}\right)^{r_3} & \left(\frac{L_1}{E \cdot D^2}\right)^{r_4} \\ \left(\frac{L_2}{E \cdot D^2}\right)^{r_1} & \left(\frac{L_2}{E \cdot D^2}\right)^{r_2} & \left(\frac{L_2}{E \cdot D^2}\right)^{r_3} & \left(\frac{L_2}{E \cdot D^2}\right)^{r_4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{L_m}{E \cdot D^2}\right)^{r_1} & \left(\frac{L_m}{E \cdot D^2}\right)^{r_2} & \left(\frac{L_m}{E \cdot D^2}\right)^{r_3} & \left(\frac{L_m}{E \cdot D^2}\right)^{r_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

che, in forma compatta diventa:

$$\underline{H} = \underline{Z} \cdot \underline{B} \implies \underline{B} = \underline{Z}^{-1} \cdot \underline{H} \quad (3.2)$$

Mettendo in un grafico l'andamento, in funzione di  $\sigma_0$  ed  $n$ , di ognuna delle quattro componenti del vettore  $B$  appena calcolato<sup>1</sup> (fig.3.1), ci si accorge che queste mappe presentano tutte un

---

<sup>1</sup>I punti  $L^{(FEM)} - h^{(FEM)}$  di cui si dispone per ogni curva sono ovviamente ben più di quattro. Pertanto, per  $\underline{Z}^{-1}$  non si intende la matrice inversa propriamente detta, bensì la pseudoinversa di Moore-Penrose, la quale, si ricorda,

andamento molto liscio in zone del dominio caratterizzate da elevati valori di  $\sigma_0$ , mentre, per valori più bassi della tensione di snervamento, si osserva un comportamento molto meno regolare, soprattutto da parte di  $B_0(\sigma_0, n)$  e  $B_2(\sigma_0, n)$ .

A questo punto, si applica anche il secondo livello di interpolazione, ossia si vanno ad

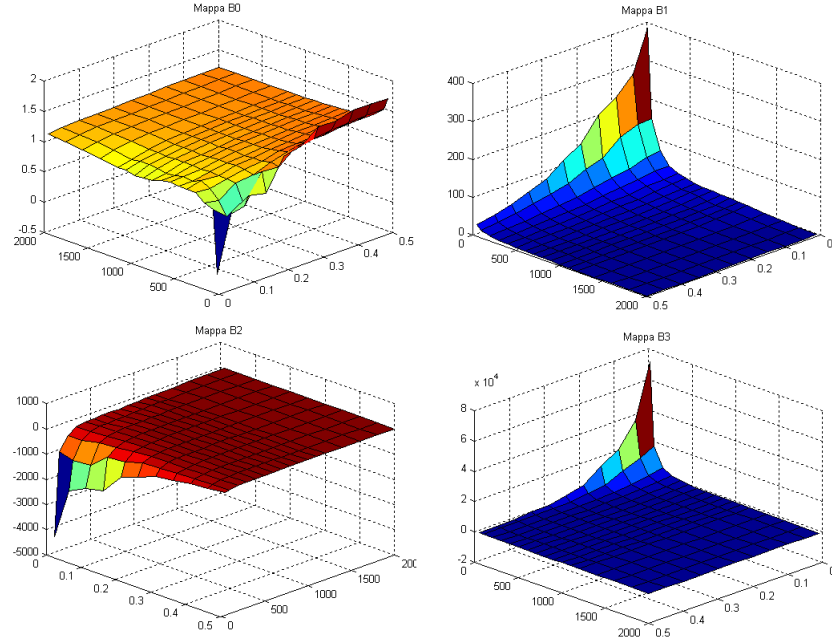


Figura 3.1: Mappe  $B_k$   
Mappe dei coefficienti  $B_k$  della 1 interpolazione in funzione di  $\sigma_0$  ed  $n$

interpolare le superfici di fig.3.1 mediante la (1.7) così da ottenere un espressione matematica che metta in corrispondenza i valori delle quattro componenti del vettore  $B$  ai parametri del materiale  $\sigma_0$  ed  $n$ . Analiticamente si avrà:

$$\begin{pmatrix} B_k(\sigma_0^{(1)}, n^{(1)}) \\ B_k(\sigma_0^{(1)}, n^{(2)}) \\ \vdots \\ B_k(\sigma_0^{(r)}, n^{(c)}) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\sigma_0^{(1)}}{U_1}\right)^{s_1} (n^{(1)}+U_2)^{s_1} & \dots & \left(\frac{\sigma_0^{(1)}}{U_1}\right)^{s_6} (n^{(1)}+U_2)^{s_6} \\ \left(\frac{\sigma_0^{(1)}}{U_1}\right)^{s_1} (n^{(2)}+U_2)^{s_1} & \dots & \left(\frac{\sigma_0^{(1)}}{U_1}\right)^{s_6} (n^{(2)}+U_2)^{s_6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\sigma_0^{(r)}}{U_1}\right)^{s_1} (n^{(c)}+U_2)^{s_1} & \dots & \left(\frac{\sigma_0^{(r)}}{U_1}\right)^{s_6} (n^{(c)}+U_2)^{s_6} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11k} \\ \beta_{12k} \\ \vdots \\ \beta_{66k} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

è calcolabile in teoria con l'espressione:

$$\mathbf{Z}^{-1} = (\mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{Z})^{-1} \cdot \mathbf{Z}^T$$

ma che in realtà, per ragioni di precisione numerica, si calcola attraverso il comando pre-impostato di Matlab `pinv(Z)`



$$\underline{B} = \underline{\Omega} \cdot \underline{\beta} \quad \implies \quad \underline{\beta} = \underline{\Omega}^{-1} \cdot \underline{B} \quad (3.4)$$

In definitiva, adesso si dispone di quattro matrici 6x6 di coefficienti  $\beta_{ij}$  noti, ovvero di un array 6x6x4, mediante i quali si è in grado di ricostruire matematicamente l'andamento di ogni curva  $L-h$  FEM relativa a materiali di Hollomon con modulo elastico di 210 GPa, aventi  $\sigma_0$  ed  $n$  compresi nel campo rappresentato in fig.1.3.

In modo del tutto analogo, si può procedere anche al calcolo delle matrici  $\beta$  per le altre due classi di materiali analizzati con il modello FEM, ovvero alluminio ( $E=70$  GPa) e titanio ( $E=115$  GPa).

I passaggi analitici e l'andamento qualitativo dei grafici sono identici a quanto appena visto per l'acciaio, per cui si evita di riportarli per non appesantire le trattazione.

## 3.2 Analisi dei risultati

Per come opera l'intero algoritmo di inversione, è di fondamentale importanza che il modello analitico appena descritto sia in grado di descrivere con la massima precisione possibile l'andamento delle curve  $L^{(FEM)}-h^{(FEM)}$ , in quanto, al momento in cui si applica la IP, essa va alla ricerca del minimo scostamento tra curva sperimentale e curva teorica.

E' allora necessario introdurre un indicatore della capacità del modello teorico di riprodurre l'andamento delle curve numeriche, al fine di poter rapidamente capire se le modifiche che successivamente saranno apportate a tale modello vadano nel senso di incrementare la precisione o meno<sup>2</sup>.

Per controllare la bontà dei risultati ottenuti è necessario confrontare le ricostruzioni teoriche delle curve  $L-h$ , ottenute mediante la 1.8 in cui si sostituiscono i  $\beta_{ij}$  calcolati nella 3.4, con le curve FEM di cui si dispone.

Come criterio di confronto si utilizza il valore della norma di distanza  $\chi$  tra curve teoriche e numeriche, norma calcolata mediante la relazione (1.9) di seguito riportata:

$$\chi(E, \sigma_0, n) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[ h^{(th)} \left( L_m^{(FEM)}, E, \sigma_0, n \right) - h_m^{(FEM)} \right]^2$$

Anche in questo caso, si opererà un'analisi statistica dei valori ottenuti in tutto il dominio, in modo da estrarre un indice che rappresenti l'accuratezza con la quale il modello teorico riesce a riprodurre l'andamento delle curve numeriche  $L^{(FEM)}-h^{(FEM)}$ .

<sup>2</sup>Ci si potrebbe domandare perchè non si va direttamente ad invertire tutte le curve del database e ad usare gli indici  $E_{\sigma}$  ed  $E_{\sigma\epsilon}$  descritti nel capitolo precedente e la risposta sta nei tempi di calcolo: l'inversione delle oltre 400 curve FEM richiede diverse ore di calcolo, per cui è piuttosto scomodo andare a controllare la variazione di questi indici dopo ogni singola modifica apportata al modello

Si riportano nelle fig.3.2, 3.3 e 3.4 gli andamenti statistici delle norme di distanza  $\chi$  tra curve teoriche e numeriche per i tre materiali acciaio, titanio, alluminio.

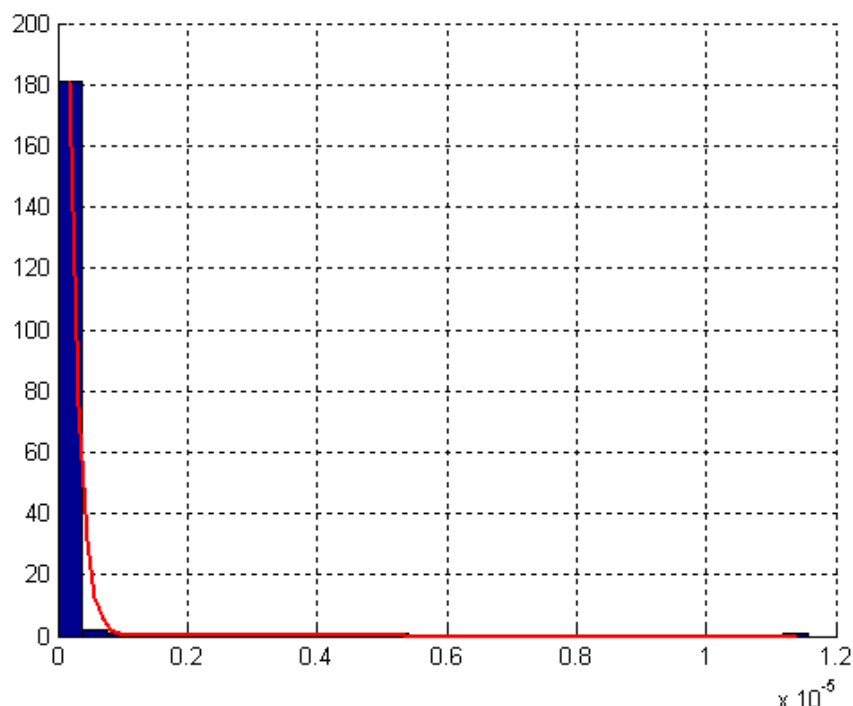


Figura 3.2: Istogramma norma  $\chi$  per l'acciaio

Come si vede, l'andamento della distribuzione è ancora quello tipico di una esponenziale. Il valore della media nei tre casi è rispettivamente pari a  $1.425 \cdot 10^{-7}$ ,  $2.203 \cdot 10^{-8}$  e  $6.708 \cdot 10^{-9}$ , mentre la media globale, ottenuta cioè considerando tutti e tre i materiali contemporaneamente, è pari a  $6.677 \cdot 10^{-8}$ .

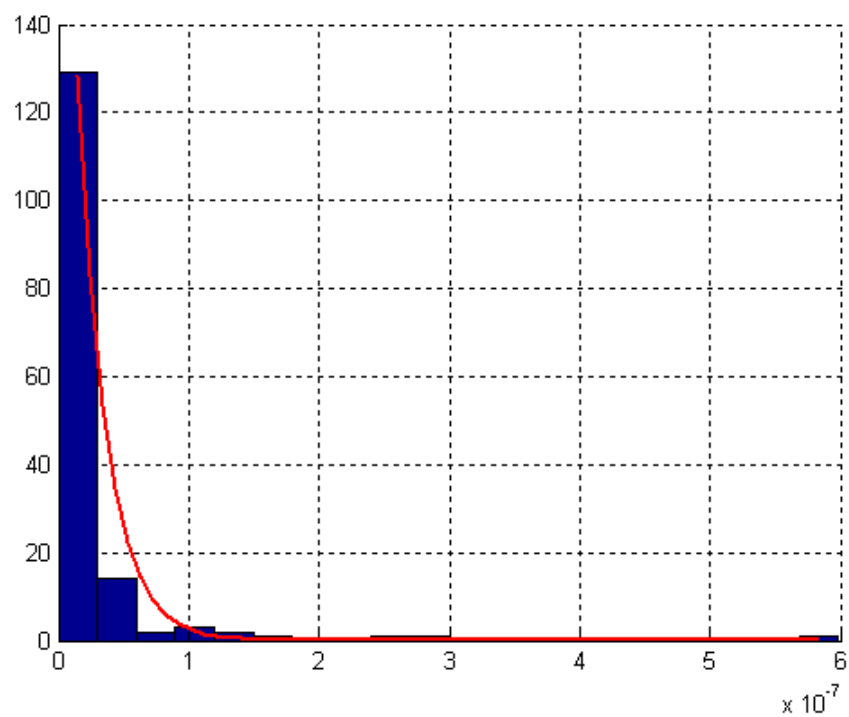
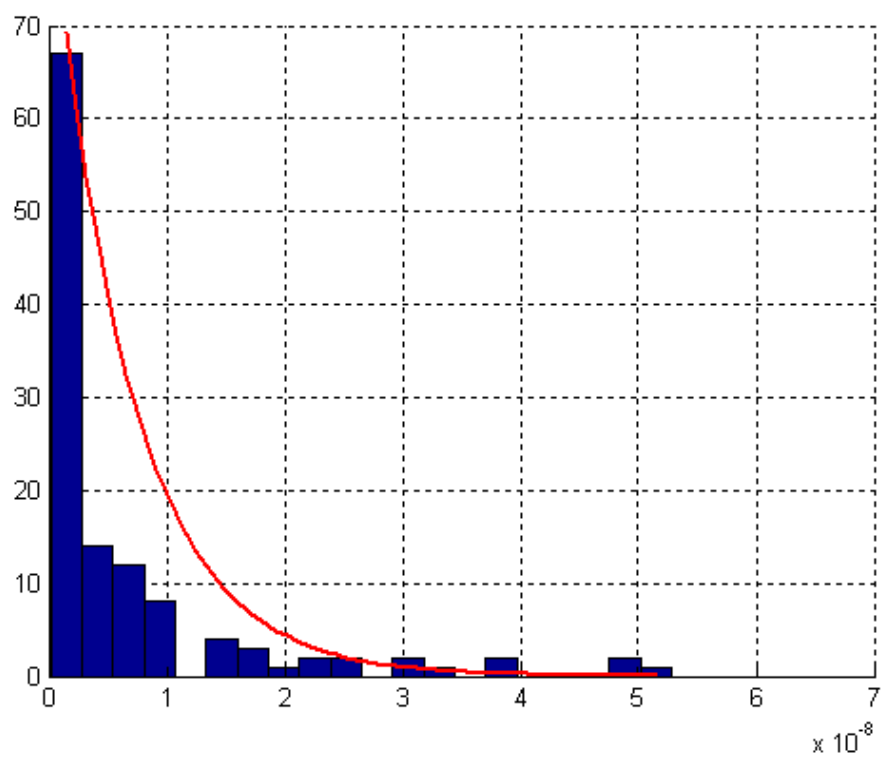
In tabella 3.1 si riporta il confronto tra i valori della media della distribuzione di  $\chi$  per acciaio, titanio e alluminio e i valori di deviazione standard della distribuzione  $E_\sigma$  e della media di  $E_{\sigma\epsilon}$ . Si noti come esista una certa correlazione tra i valori della prima colonna e quelli delle altre due.

Ciò significa che, nel cercare di migliorare il comportamento dell'algoritmo andando a

media ( $\chi$ )	dev.st. ( $E_\sigma$ )	media ( $E_{\sigma\epsilon}$ )
$1.425 \cdot 10^{-7}$	0.0260	0.0072
$2.203 \cdot 10^{-8}$	0.0215	0.0055
$6.708 \cdot 10^{-9}$	0.0202	0.0039

Tabella 3.1: Correlazione tra  $\chi$ ,  $E_\sigma$  ed  $E_{\sigma\epsilon}$

modificare la funzione interpolante, il valore della media della distribuzione  $\chi$  è una funzione

Figura 3.3: Istogramma norma  $\chi$  per il titanioFigura 3.4: Istogramma norma  $\chi$  per l'alluminio

obiettivo coerente con lo scopo prefissato, e sarà dunque sempre presa in considerazione negli sviluppi futuri.

### 3.3 Modifiche al primo livello di interpolazione

#### 3.3.1 Illustrazione del problema

Osservando gli istogrammi di figura 3.2 si osserva che la quasi totalità dei valori assunti dagli errori relativi si trova entro una banda molto ristretta e adiacente all'asse delle ordinate, ad eccezione di un piccolo insieme di valori che si discostano molto più significativamente, contribuendo in modo determinante ad alzare il valore della media. Non è difficile convincersi del fatto che, se si riuscisse a far rientrare quei valori anomali entro una range più ristretto, il vantaggio che se ne trarrebbe sarebbe molto sostanzioso.

Si è pensato allora di introdurre un pò di fisica all'interno di questo modello euristico, in modo da pre-condizionare il comportamento delle funzioni interpolanti.

Facile a dirsi, molto meno a farsi. Infatti la fisica del fenomeno è estremamente complessa ed oscura. Il processo di indentazione coinvolge praticamente da subito la plasticità del materiale, rendendo dunque inadatti i modelli tradizionali basati sull'ipotesi di materiale elastico lineare. Tuttavia l'unico modello disponibile in letteratura in grado di prevedere il comportamento del materiale indentato è quello di Hertz, basato proprio sul legame costitutivo elastico lineare.

Si consideri allora la relazione 1.6, di seguito riportata:

$$\frac{h}{D} = \sum_{k=1}^4 B_k \cdot \left( \frac{L}{E \cdot D^2} \right)^{r_k}$$

Essa rappresenta una sommatoria di quattro termini con esponenti  $r_k$  crescenti con  $k$ . Vicino all'origine a dominare è necessariamente il primo termine in quanto, avendo l'esponente più piccolo di tutti, è quello che va a zero meno repentinamente. Ma vicino all'origine, anche laddove sarà già comparsa la plasticità, a predominare è sicuramente la deformazione *elastica*, la quale è calcolabile in modo molto accurato ricorrendo al modello hertziano.

Ecco che allora è possibile calcolare a priori il coefficiente del primo termine della sommatoria 1.6 a patto che sia imposto pari a  $2/3$  il valore dell'esponente di tale termine. Si tratta, in pratica, di togliere un grado di libertà alla funzione della prima interpolazione, andando però non a tagliare uno dei quattro termini della sommatoria, bensì a imporne a priori il valore del coefficiente moltiplicativo.

Questa operazione intacca solo minimamente l'accuratezza mediante la quale l'equazione 1.6 riproduce l'andamento delle curve di indentazione FEM, ma, per contro, eliminando un grado di libertà, fa sì che il secondo livello di interpolazione introduca errori inferiori, e che quindi

la funzione globalmente acquisti accuratezza. Inoltre, l'eliminazione di un grado di libertà nel primo livello riduce il numero complessivo di calcoli eseguiti dall'algoritmo, contribuendo pertanto anche a ridurre il costo computazionale globale.

Ad ulteriore giustificazione del motivo per il quale si è decisa questa modifica si osservi come, lasciando all'algoritmo di ricerca dei minimi quadrati la determinazione dei valori ottimali di tutti e quattro i coefficienti  $B_k$ , in corrispondenza del valore  $\sigma_0 = 50 \text{ MPa}$  ed  $n = 0.01$ ,  $B_0$  assume valore negativo. Ciò è del tutto incoerente con la fisica del fenomeno in quanto un  $B_0$  negativo fa sì che la curva  $h(L)$  teorica parta con pendenza sì verticale, ma diretta verso le  $h$  negative, cosa che non possiede alcun senso fisico (fig 3.5).

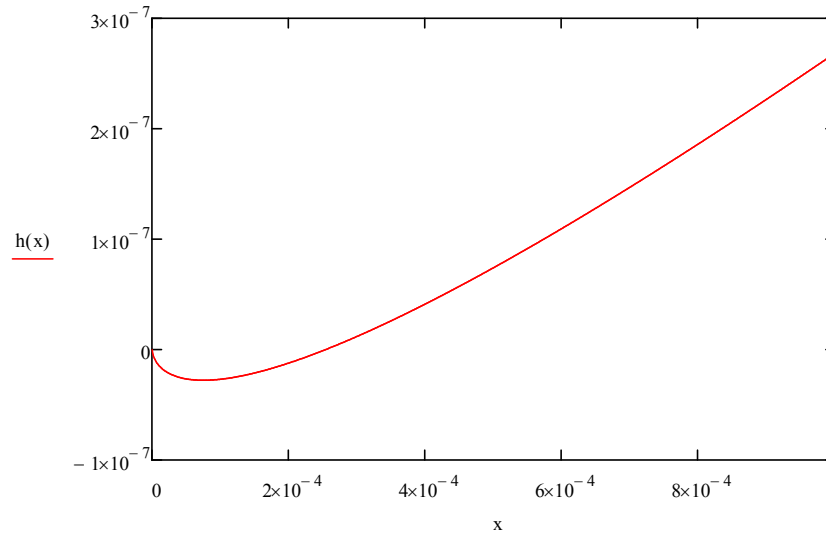


Figura 3.5: Ricciolo nell'origine  
Andamento della funzione  $h(L)$  teorica avente  $B_0$  negativo

### 3.3.2 Calcolo del coefficiente $B_0$

Come detto, per calcolare il valore numerico da assegnare a  $B_0$ , si ricorre ai risultati della teoria Hertz.

L'ipotesi di materiale elastico lineare, fa sì che  $B_0$  venga a dipendere unicamente dalle proprietà elastiche del materiale quali modulo di Young e modulo di Poisson, e che debba necessariamente assumere un andamento costante al variare di  $\sigma_0$  ed  $n$ .

In letteratura è possibile reperire il legame analitico tra carico e profondità di indentazione

caratteristico del modello hertziano (vedi eq.(3.5)):

$$h = 1.04 \cdot \sqrt[3]{\frac{L^2 \cdot C_E^2}{K_D}} \quad (3.5)$$

dove

$$C_E = \frac{1 - \nu_m^2}{E_m} + \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} \quad (3.6)$$

Il pedice  $m$  sta ad indicare grandezze riferite al materiale indentato, mentre  $s$  indica le stesse grandezze per la sfera indentatrice. Il coefficiente  $K_D$  presente nella (3.5) è semplicemente pari al diametro della sferetta nell'ipotesi, per noi sempre verificata, di indentazione di una superficie piana.

Per quanto riguarda i moduli di Poisson, essi sono stati posti pari a 0.3 per tutti i materiali indentati ed a 0.22 per la sfera (valore utilizzato nelle simulazioni FEM) , mentre i moduli elastici sono quello proprio del materiale indentato e quello del tungsteno per la sfera, posto pari a 630 GPa.

Sostituendo ad esempio nella (3.5) questi valori numerici ed ipotizzando di indentare acciaio ( $E_m=210 \text{ GPa}$ ), si ottiene:

$$h = 4.862 \cdot 10^{-4} L^{\frac{2}{3}} \quad (3.7)$$

Tuttavia bisogna tener presente che il coefficiente  $B_0$  deve entrare nella formula adimensionalizzata

$$\frac{h}{D} = B_0 \cdot \left( \frac{L}{E \cdot D^2} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.8)$$

per cui, sostituendo nella (3.8) l'espressione di  $h$  dato dalla (3.5) si ottiene:

$$B_0 = 1.04 \cdot (C_E \cdot E)^{\frac{2}{3}} \quad (3.9)$$

Nel caso dell'acciaio, ad esempio, la 3.9 fornisce il risultato

$$B_0 = 1.192$$

In modo analogo si determina il valore di  $B_0$  per il titanio (1.097) e per l'alluminio (1.051).

### 3.3.3 Risultati conseguiti

Si vanno ora ad esaminare gli effetti provocati da questa piccola, ma sostanziale, modifica.

Dal punto di vista della procedura di calcolo degli altri tre coefficienti, concettualmente cambia ben poco visto che è sufficiente spostare dalla parte del termine noto il primo termine della

sommatoria 1.6 ottenendo:

$$\frac{h}{D} - B_0 \cdot \left( \frac{L}{E \cdot D^2} \right)^{\frac{2}{3}} = \sum_{k=1}^3 B_k \cdot \left( \frac{L}{E \cdot D^2} \right)^{r_k} \quad (3.10)$$

Si può dunque procedere al calcolo dei rimanenti tre coefficienti esattamente come visto a proposito della 3.1. Quindi, intanto è sparita una colonna della matrice  $\mathbf{Z}$  e questo è un già un bel guadagno sia in termini di tempi di calcolo che in termini di numero di condizionamento della matrice stessa. In più adesso si può avere la certezza che la funzione interpolante non avrà comportamenti strani nei pressi dell'origine della curva  $h(L)$  visto che il coefficiente  $B_0$  è imposto sempre positivo.

Un altro risultato molto importante è la regolarizzazione degli andamenti dei rimanenti tre coefficienti  $B_k$  in funzione di  $\sigma_0$  ed  $n$  (fig 3.6).

Questa circostanza si riflette positivamente sulla capacità della funzione teorica (1.8) di

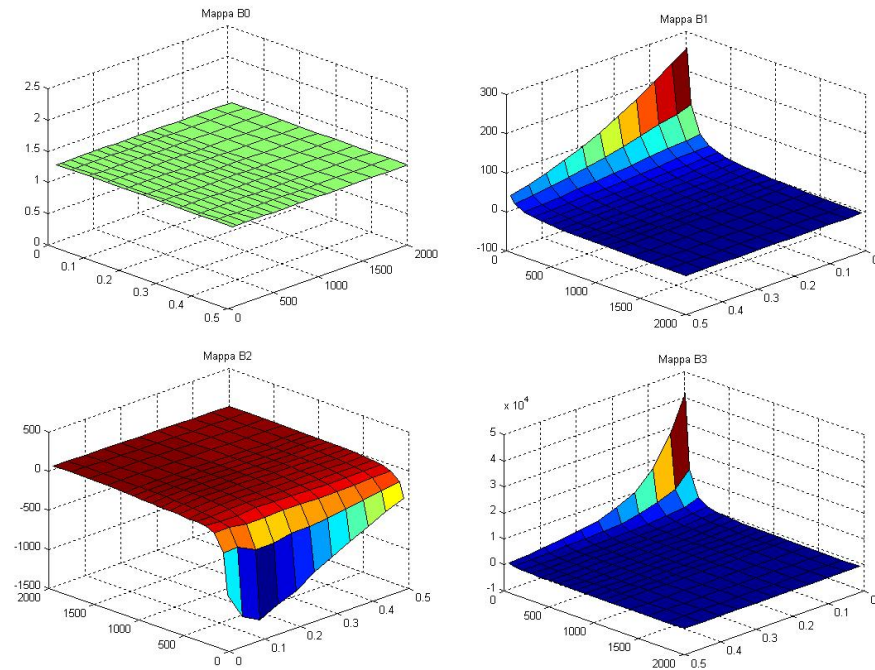


Figura 3.6: Mappe  $B_k$  con 3 d.o.f. per l'acciaio

Mappe dei coefficienti  $B_k$  della 1 interpolazione in funzione di  $\sigma_0$  ed  $n$  ottenute per l'acciaio

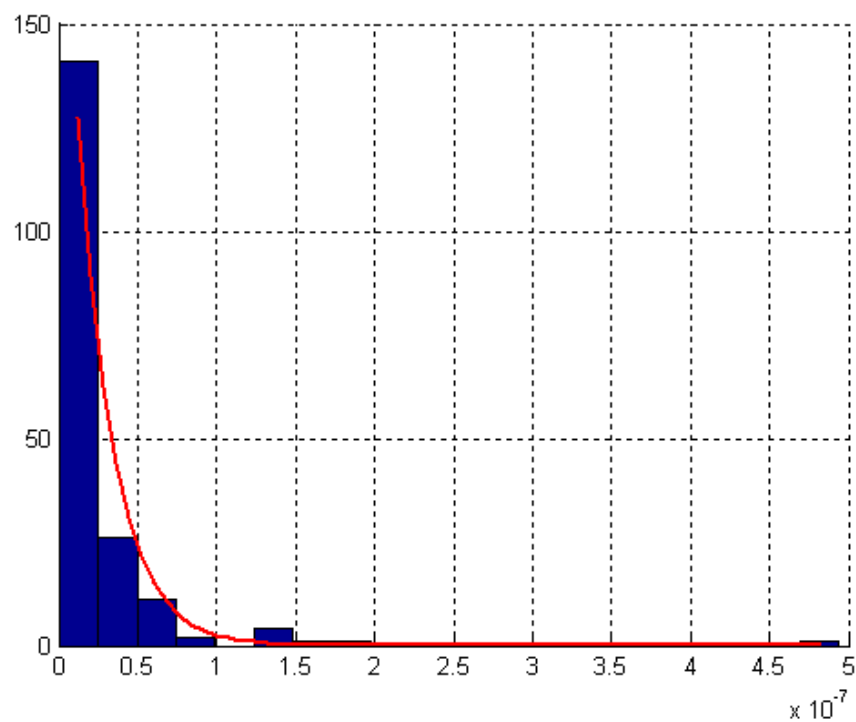
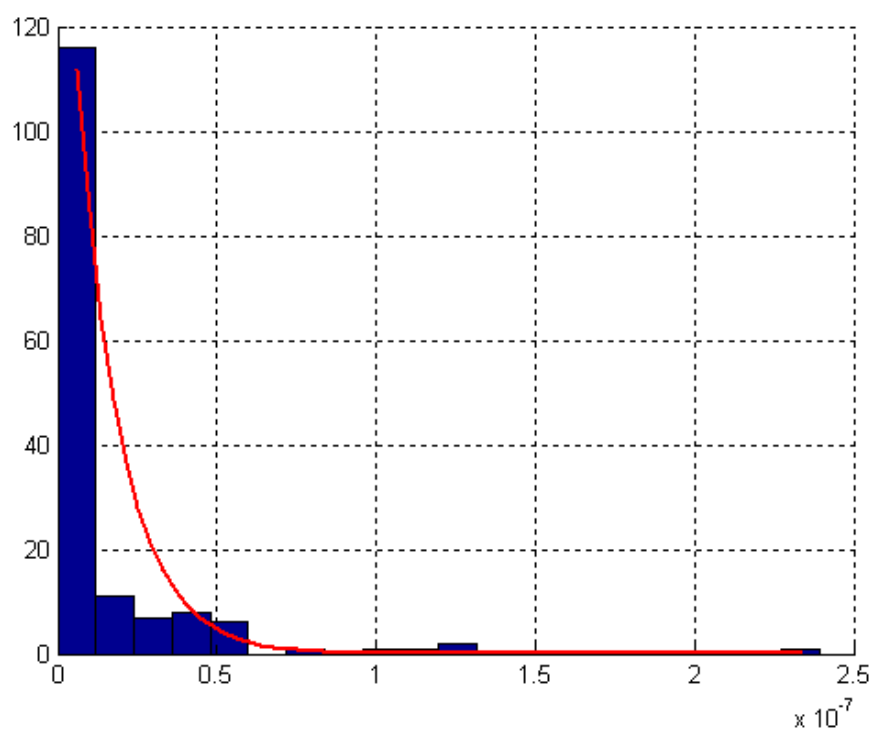
interpolare i dati numerici con errori globali molto inferiori.

In fig.3.7 si può vedere il nuovo istogramma della distribuzione di  $\chi$  per l'acciaio.

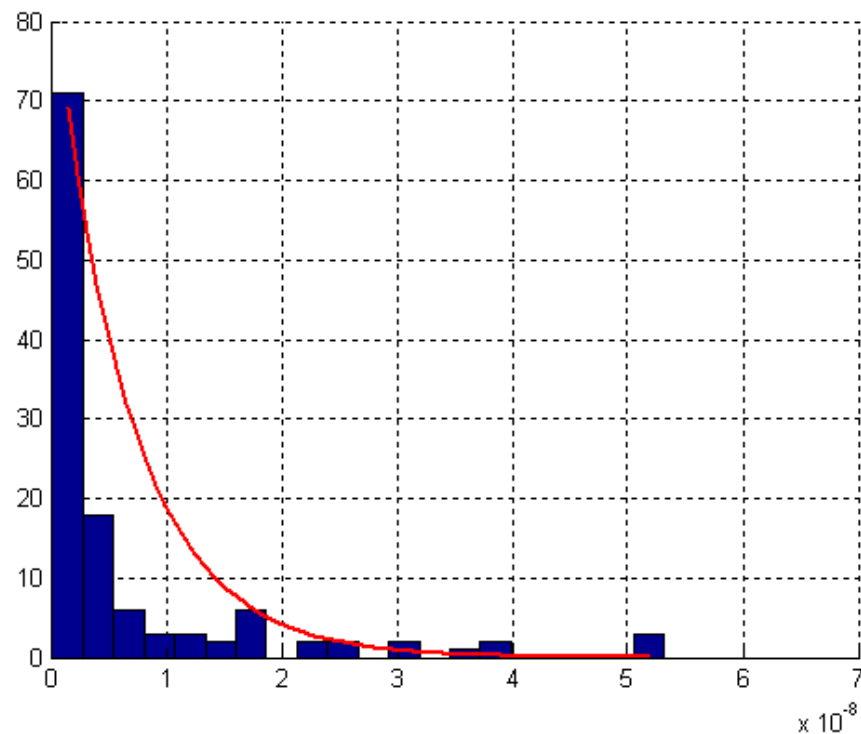
Il valore della media è sceso da  $1.425 \cdot 10^{-7}$  a  $2.236 \cdot 10^{-8}$ , praticamente un ordine di grandezza.

Nelle fig.3.8 e 3.9 sono riportati i corrispondenti diagrammi per titanio e alluminio.

Il valore della media nei due casi si è portato rispettivamente a  $1.387 \cdot 10^{-8}$  e  $6.641 \cdot 10^{-9}$ . Confrontando questi dati con quelli riportati in tabella 3.1, si vede che il valore della media si è

Figura 3.7: Istogramma norma  $\chi$  per l'acciaioFigura 3.8: Istogramma norma  $\chi$  per il titanio



Figura 3.9: Istogrammi norma  $\chi$  per l'alluminio

dimezzato per il titanio ed è rimasto invariato invece per l'alluminio. Globalmente il bilancio di questa modifica è dunque positivo, tanto è vero che, considerando i risultati di tutte e tre le classi di materiali assieme, la media totale è scesa da  $6.677 \cdot 10^{-8}$  a  $1.542 \cdot 10^{-8}$ .

## 3.4 Secondo livello di interpolazione

### 3.4.1 Illustrazione del problema

Le modifiche apportate al primo livello di interpolazione hanno portato un giovamento sostanziale, tuttavia è possibile ottenere livelli di precisione ancora maggiori andando ad agire sul secondo livello di interpolazione, ossia sulle funzioni 1.7.

A differenza, però, del caso precedente, la relazione 1.7 con la fisica ha molto poco a che vedere. Quindi un intervento in questo senso non è fattibile. Quello che invece si può fare è cercare una forma matematica che meglio si adatti all'andamento delle funzioni  $B_k(\sigma_0, n)$  agendo in particolare su:

- base di funzioni
- esponenti

- numero di gradi di libertà

Altrimenti, si può pensare di cambiare radicalmente approccio, utilizzando funzioni diverse dalle polinomiali come ad esempio le funzioni spline, oppure delle funzioni più semplici (cioè di grado più basso) valide solo localmente anzichè in tutto il dominio. Nei prossimi paragrafi sono illustrati gli sviluppi e le conseguenze di tutti questi casi.

### 3.4.2 Modifica della funzione polinomiale

Si consideri la 1.7, di seguito riportata:

$$B_k = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \beta_{ijk} \left( \frac{\sigma_0}{U_1} \right)^{s_i} (n + U_2)^{s_j}$$

e si osservino le tre serie di grafici riportati in fig. 3.10.

In effetti, molte di queste funzioni non hanno dei comportamenti molto strani. Per cui ha senso chiedersi se una opportuna combinazione lineare di funzioni *intelligenti*, ossia di funzioni che possiedano già intrinsecamente gli andamenti che devono essere riprodotti, possa aiutare ad migliorare la precisione del modello. Al riguardo sono state esplorate diverse soluzioni basate su:

- funzioni esponenziali negative
- funzioni polinomiali
- funzioni trigonometriche

Alla fine, dopo una lunga serie di prove, la scelta è ricaduta su:

- funzioni polinomiali a sei gradi di libertà per descrivere gli andamenti di  $B_k$  in funzione di  $n$
- funzioni trigonometriche inverse a sei gradi di libertà per descrivere gli andamenti di  $B_k$  in funzione di  $\sigma_0$

Contemporaneamente alla base di funzioni, è stata studiata anche la possibile modifica del vettore degli esponenti  $s$ . In particolare, si è deciso di implementare due serie di esponenti differenti per i termini nella variabile  $\sigma_0$  e nella variabile  $n$ . Per limitare la ricerca ad un numero ristretto di parametri, si è scelto di definire i vettori degli esponenti mediante due coefficienti:

$$\begin{aligned} s_{\sigma i} &= s_{\sigma 0} + p_{\sigma} \cdot (i - 1) & \text{con } i = 1 \dots 6 \\ s_{ni} &= s_{n0} + p_n \cdot (i - 1) & \text{con } i = 1 \dots 6 \end{aligned} \quad (3.11)$$

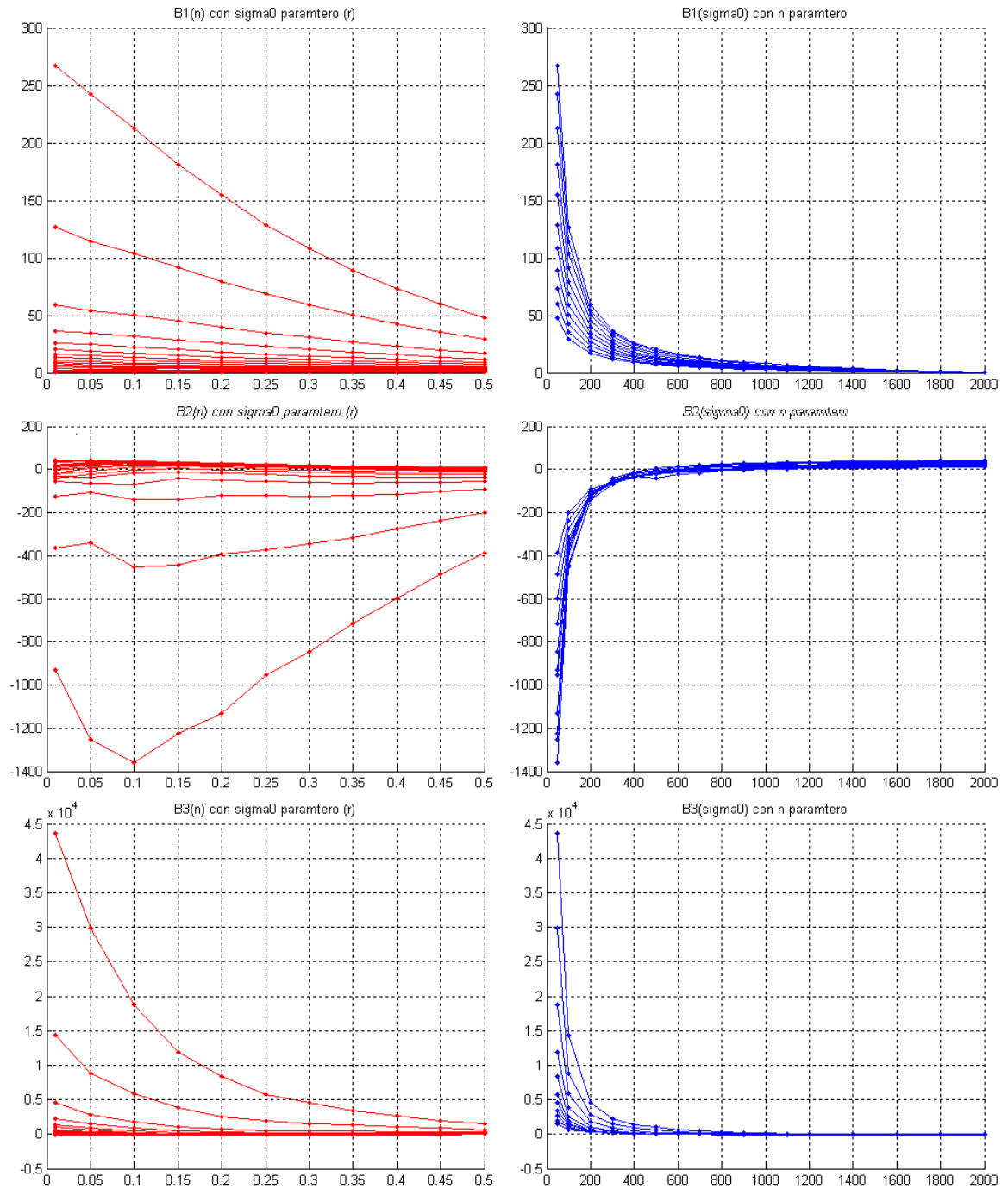


Figura 3.10: Sezioni delle funzioni  $B_k(\sigma_0, n)$   
 Andamento delle funzioni  $B_k(\sigma_0, n)$  per l'acciaio rappresentate in grafici 2D rispettivamente con  $n$  variabile e  $\sigma_0$  parametro e viceversa

Come si vede, una volta definiti i valori di  $s_{\sigma 0}$  ( $s_{n0}$ ) e  $p_{\sigma}$  ( $p_n$ ), è univocamente determinato il vettore degli esponenti.

In definitiva, è stata condotta una massiccia serie di simulazioni numeriche al variare sia della base di funzioni, sia dei vettori degli esponenti, alla ricerca della massima precisione del modello. La forma finale della relazione analitica è la seguente:

$$B_k = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \beta_{ijk} \cdot \left[ \csc \left( \frac{\sigma_0}{U_1} \right) \right]^{s_{\sigma i}} (n + U_2)^{s_{nj}} \quad (3.12)$$

In conclusione, le modifiche rispetto alla 1.7 hanno riguardato l'introduzione della funzione cosecante per descrivere l'andamento rispetto alla variabile  $\sigma_0$ , e la sostituzione del vettore di esponenti  $s_{i(j)}$  con due vettori differenziati  $s_{\sigma i}$  ed  $s_{nj}$ .

### 3.4.3 Risultati conseguiti

Si procede ora ad illustrare, sulla scia di quanto visto nel paragrafo 3.3.3, i risultati ottenuti con queste modifiche attraverso l'analisi degli istogrammi delle norme di distanza  $\chi$  che si ottengono per acciaio, titanio e alluminio.

Tali istogrammi (fig. 3.11, 3.12 e 3.13) mettono in chiara luce l'ulteriore passo in avanti compiuto dal modello nel caratterizzare il fenomeno.

I valori delle medie delle distribuzioni per i tre materiali sono pari a:

- $9.491 \cdot 10^{-9}$  per l'acciaio
- $9.149 \cdot 10^{-9}$  per il titanio
- $6.515 \cdot 10^{-9}$  per l'alluminio

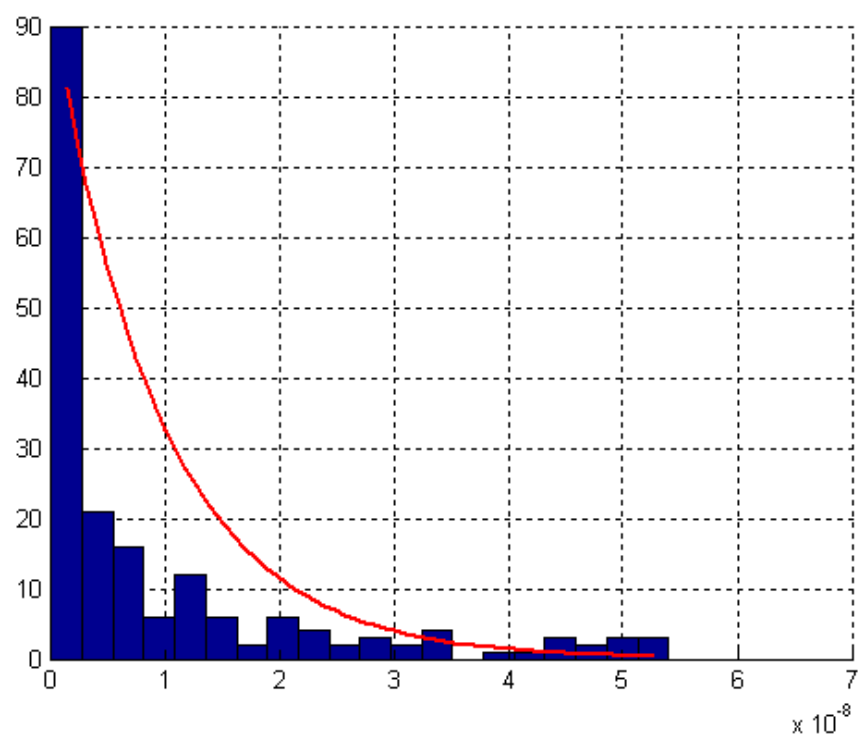
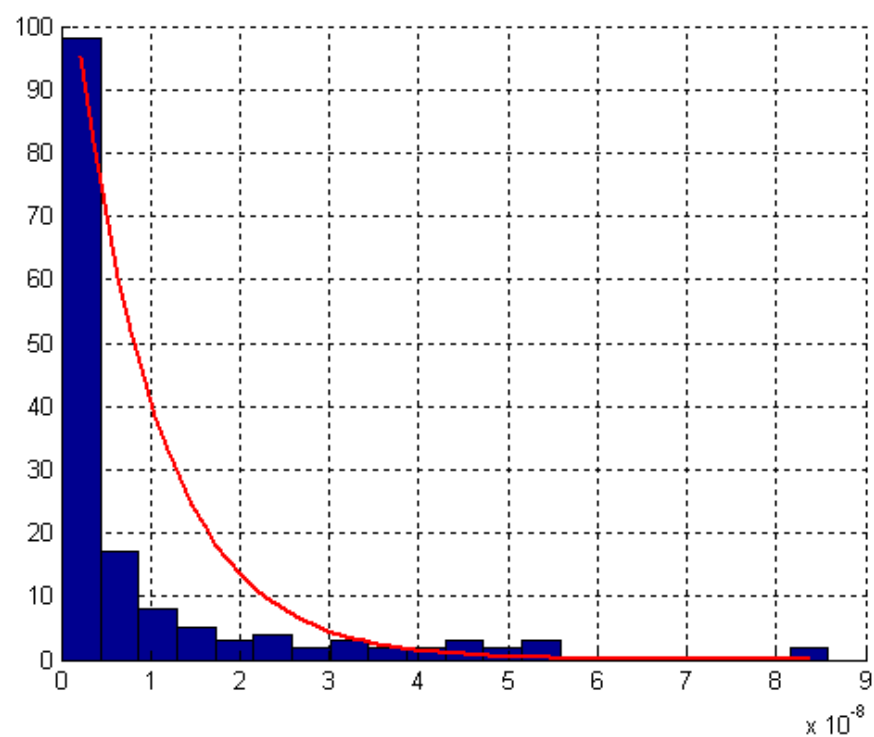
Il valore della media globale, considerando cioè tutti i valori di  $\chi$  assieme, si è praticamente dimezzato, essendo passato da  $1.542 \cdot 10^{-8}$  a  $8.598 \cdot 10^{-9}$  (se si considera l'andamento di partenza della distribuzione  $\chi$ , la diminuzione della media è di quasi un ordine di grandezza).

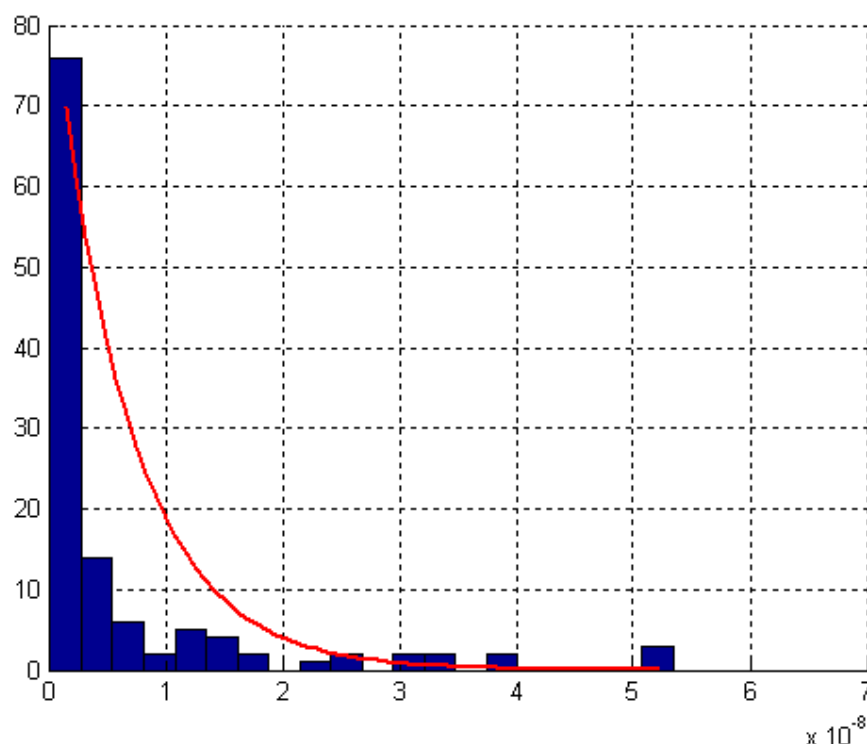
In tabella 3.2 si riporta l'andamento della media della norma di distanza al variare delle modifiche apportate al modello.

Si è ritenuto opportuno, a questo punto, applicare la nuova IP con questo nuovo modello a tutto il database di curve FEM per capire a che livello di precisione si è giunti nel riprodurre il comportamento a trazione del materiale.

Ancora una volta, per quantificare numericamente l'incremento di precisione, si farà uso degli indici  $E_{\sigma}$  ed  $E_{\sigma \epsilon}$  definiti nel capitolo precedente.

Il parametro  $E_{\sigma}$  risulta ora distribuito come mostrato in fig.3.14.

Figura 3.11: Istogramma norma  $\chi$  per l'acciaioFigura 3.12: Istogramma norma  $\chi$  per il titanio

Figura 3.13: Istogramma norma  $\chi$  per l'alluminio

	Valori iniziali	Modif. 1° liv.	Modif. 2° liv.
$\chi_{acc}$	$1.425 \cdot 10^{-7}$	$2.236 \cdot 10^{-8}$	$9.491 \cdot 10^{-9}$
$\chi_{tit}$	$2.203 \cdot 10^{-8}$	$1.387 \cdot 10^{-8}$	$9.149 \cdot 10^{-9}$
$\chi_{all}$	$6.708 \cdot 10^{-9}$	$6.641 \cdot 10^{-9}$	$6.515 \cdot 10^{-9}$
$\chi_{TOT}$	$6.677 \cdot 10^{-8}$	$1.542 \cdot 10^{-8}$	$8.598 \cdot 10^{-9}$

Tabella 3.2: Andamento del valor medio di  $\chi$ 

L'andamento è ancora quello tipico di una distribuzione gaussiana, ma stavolta i valori di media e deviazione standard sono rispettivamente pari a 0.0014 e 0.0149. Ciò significa che, al 99% di confidenza si avrà:

$$-3.7\% \leq \frac{\Delta\sigma_0}{\sigma_0} \leq 4\%$$

Un'accuratezza superiore a questa non si ottiene neanche dalla prova di trazione stessa, per cui andare oltre non avrebbe alcun senso.

Per quanto riguarda invece l'altro indice di qualità, ossia  $E_{\sigma\epsilon}$ , la sua distribuzione è quella riportata in fig.3.15.

Il valore della media è sceso a 0.0055, cosicché, al 99%,  $E_{\sigma\epsilon}$  è compreso tra zero e 0.0254. In fig.2.16 si riporta il confronto tra la curva di trazione reale e stimata corrispondente al massimo valore di  $E_{\sigma\epsilon}$ .

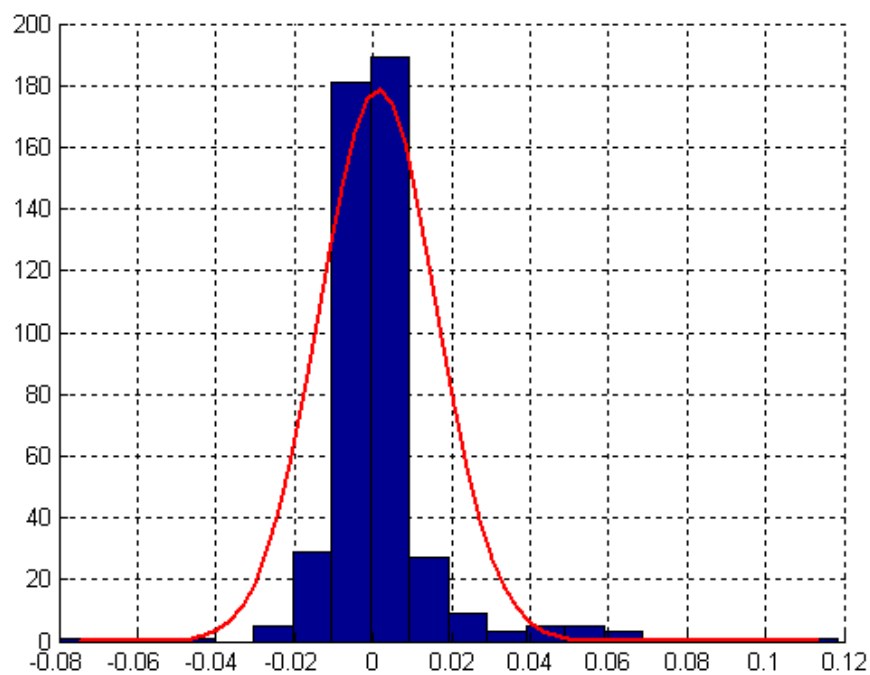
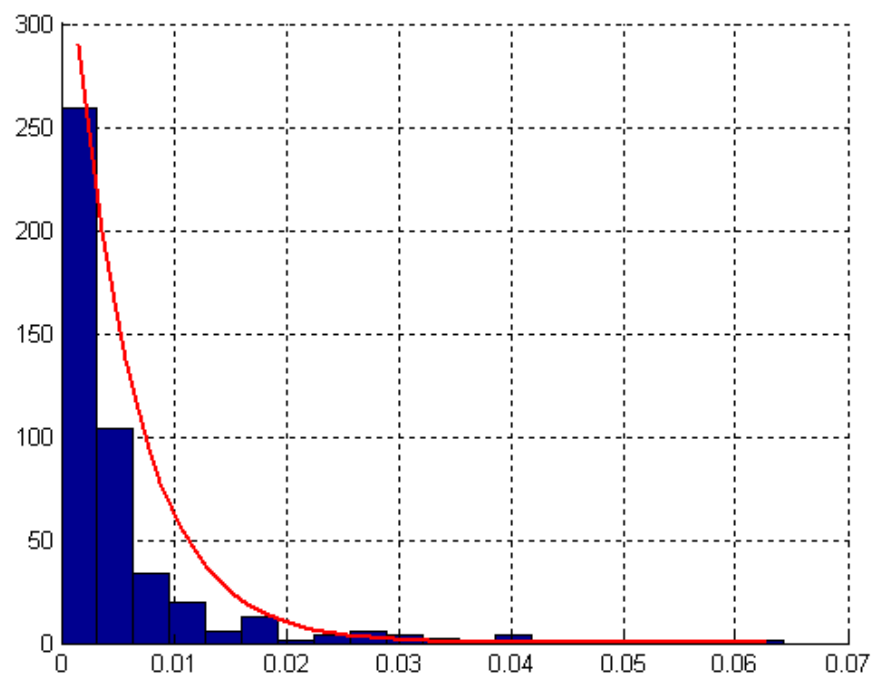
Figura 3.14: Istogramma  $\Delta\sigma_0/\sigma_0$ 

Figura 3.15: Istogramma Errore relativo medio di stima delle curve di trazione

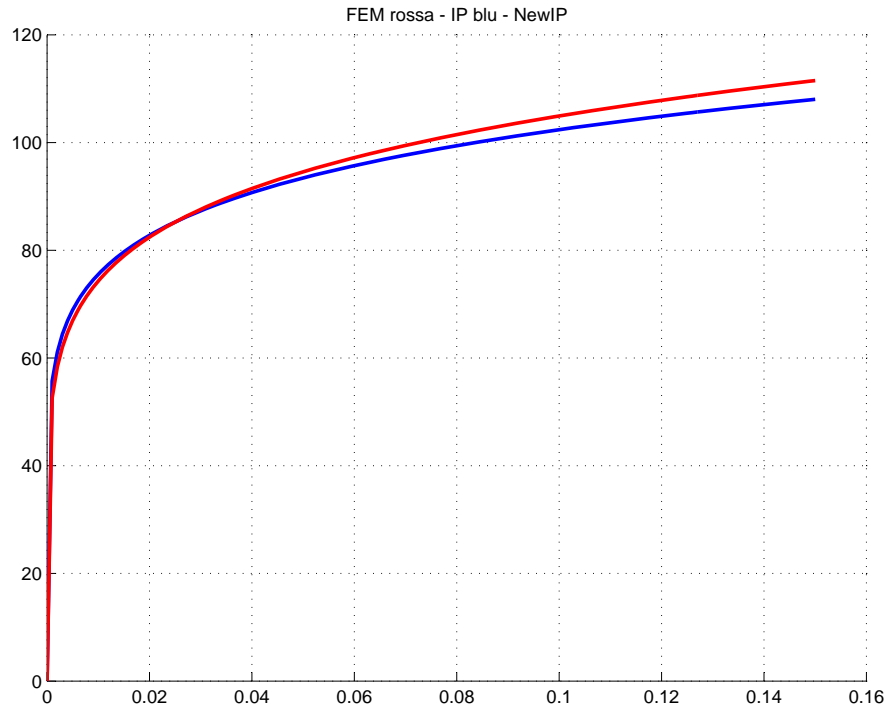


Figura 3.16: Curve di trazione reale stimata corrispondenti al massimo valore di  $E_{\sigma\epsilon}$

Rispetto al caso mostrato in fig.2.3, è facilmente visibile l'incremento di precisione ottenuto. In fig.3.17 si riporta anche il confronto tra le curve trazione corrispondenti ad  $E_{\sigma\epsilon}=0.0254$ . Si noti l'eccellente capacità raggiunta dall'algoritmo nel riprodurre il comportamento a trazione del materiale.

Si può dunque affermare che il livello di accuratezza raggiunto è sicuramente adeguato per poter affrontare l'analisi progressiva. Tuttavia, si è deciso comunque di operare lo studio di approcci differenti da questo essenzialmente per due motivi:

1. i tempi di elaborazione che si riscontrano con questa tecnica di regressione sono dell'ordine delle decine di secondi per ogni inversione. Ciò di per sè non è un dato allarmante, ma se si considera che l'analisi progressiva richiede almeno tre o quattro inversioni, e che anche l'azzeramento dei dati sperimentali potrebbe in futuro essere integrato con la IP stessa in una sorta algoritmo globale che ricerca il minimo valore di  $\chi$  in uno spazio ad almeno tre dimensioni, dove alle solite  $\sigma_0$  ed  $n$  si aggiungono anche una od entrambe le coordinate del punto di azzeramento, si capisce bene come l'abbattimento del costo computazionale rappresenti una priorità assoluta
2. l'andamento dei coefficienti  $B_k$  perde buona parte della sua *smoothness*, soprattutto in corrispondenza di bassi valori di  $\sigma_0$  ed  $n$ , allorchè si vanno ad interpolare le curve  $L-h$



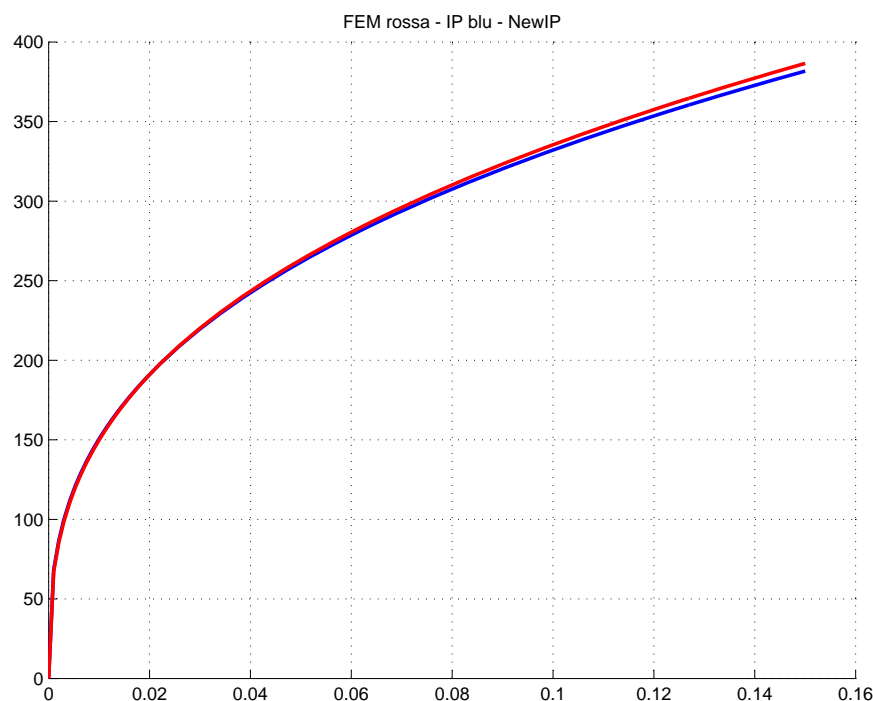


Figura 3.17: Curve di trazione reale stimata corrispondenti  $E_{\sigma\epsilon}=0.0254$

del database fino a valori di penetrazione inferiori a  $100 \mu m$  (vedi fig.3.18). Ciò rende meno affidabile l'interpolazione attraverso un'unica relazione valida in tutto il dominio.

## 3.5 Sviluppo di tecniche alternative

### 3.5.1 Interpolazione mediante funzioni spline

Un diverso approccio rispetto all'interpolazione polinomiale approssimata è rappresentato dalle funzioni spline. Queste sono funzioni polinomiali a tratti, di grado generalmente pari o inferiore a tre, caratterizzate da continuità di classe almeno  $C^1$ .

Generalmente, tali funzioni vengono costruite in modo da passare per tutti i punti a disposizione. Non sono tuttavia rari i casi in cui si utilizzano funzioni spline approssimanti nel senso dei minimi quadrati, nel qual caso si parla di spline di Hermite.

Nel caso in esame, si rimarrà nell'ambito delle spline classiche, passanti cioè per tutti i punti a disposizione.

Il problema maggiore consiste nel dover riprodurre l'andamento non di una curva, bensì di una superficie. Questo fatto complica non poco le cose, provocando una grande proliferazione di condizioni di interfaccia tra funzioni spline adiacenti. Al di là dello sviluppo dei calcoli algebrici, è la programmazione informatica il vero scoglio da superare, data anche la mancanza

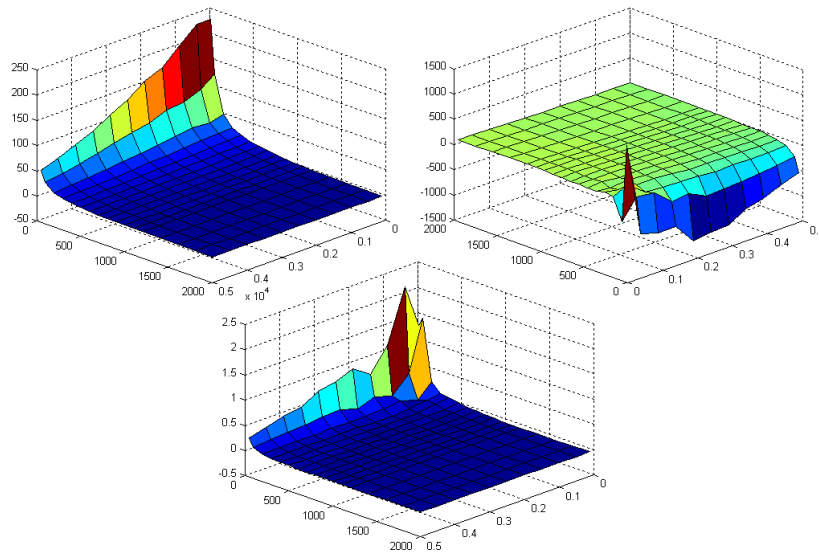


Figura 3.18: Andamento delle funzioni  $B_k(\sigma_0, n)$  con taglio a  $50 \mu m$

in Matlab di routine appositamente dedicate.

Quello che invece in Matlab è presente è una serie di funzioni pre-impostate per il calcolo delle funzioni spline in  $\mathbf{R}^2$ , ossia riguardanti funzioni di una sola variabile. Il risparmio di tempo di programmazione che si ottiene dall'utilizzo di tali routine è talmente elevato da non poter essere trascurato. Ad esempio, attraverso i comandi `csape` o `spline` si ottengono in modo rapidissimo i coefficienti dei polinomi di ogni tratto, una volta forniti in ingresso i vettori delle ascisse e delle ordinate. E' possibile scegliere inoltre tra un'ampia gamma di condizioni agli estremi: è immediato passare ad esempio dalle spline naturali, caratterizzate da valor nullo della derivata seconda alle due estremità, fino alla completa personalizzazione di dette condizioni, in cui è possibile imporre i valori anche delle derivate prime.

Pertanto ci si pone di fronte il problema di riuscire a caratterizzare il comportamento di una funzione di *due* variabili attraverso una qualche combinazione di funzioni di *una* variabile.

La procedura adottata in questa sede è la seguente: si supponga di voler calcolare la curva  $L-h$  teorica del materiale avente  $\sigma_0 = 550$  MPa ed  $n = 0.22$ . Per valutare i coefficienti  $B_k$  è necessario

1. creare un reticolo di funzioni spline (vedi fig.3.19) passanti per i punti ottenuti dalla prima interpolazione (punti che, si ricorda, rappresentano i coefficienti della funzione polinomiale con la quale si opera l'interpolazione delle curve  $L-h$  del database). Come condizioni agli estremi si assumono quelle tipiche delle spline naturali, ossia derivate seconde nulle agli estremi. Questa operazione è eseguibile una volta per tutte, per cui il

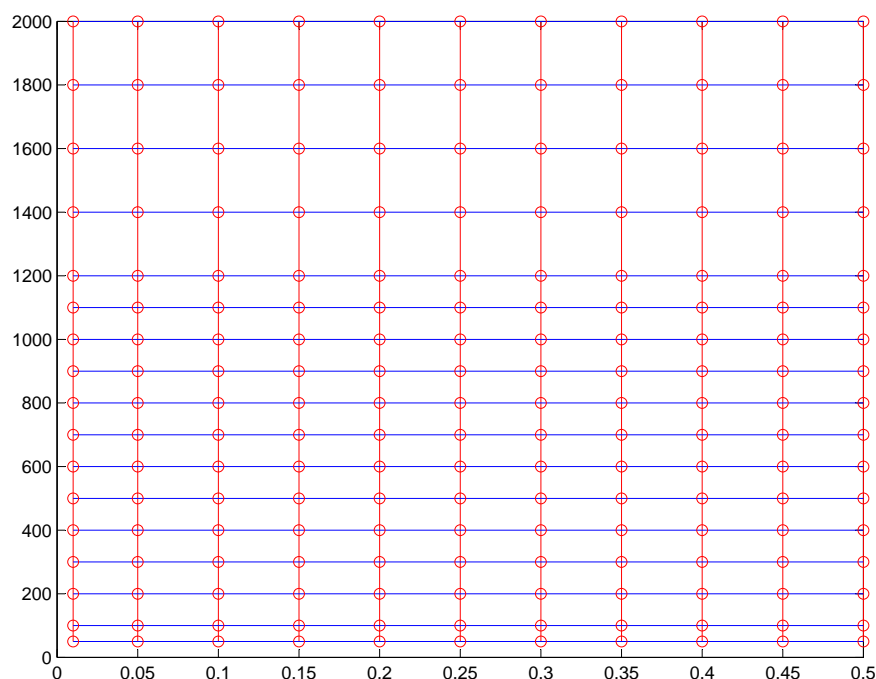


Figura 3.19: Reticolo di funzioni spline

I cerchietti rossi rappresentano i punti, le linee rosse e blu rappresentano ognuna una diversa curva spline passante per i punti dati

suo costo computazionale, peraltro molto basso, non rappresenta un fattore da prendere in considerazione.

2. valutare, in corrispondenza dei valori  $\sigma_0$  ed  $n$  impostati, il valore delle funzioni spline del reticolo principale, ottenendo così due nuovi set di punti, uno a  $\sigma_0$  costante, l'altro ad  $n$  costante (fig.3.20).
3. calcolo delle funzioni spline, ancora naturali, che interpolino i punti appena ottenuti e loro valutazione nel punto in esame (fig.3.21). Si otterranno due valori differenti, uno per ognuna delle due funzioni, valori che fortunatamente si discostano molto poco l'uno dall'altro (molto poco nel senso che cominciano ad essere differenti dalla decima cifra decimale in poi). Per rendere univoco l'algoritmo si sceglie di assumere la media dei due valori così ottenuti.

Reiterando i passi 2 e 3 di questa procedura per ogni valore di  $\sigma_0$  ed  $n$ , si ottengono le tre mappe teoriche  $B_k^{(th)}(\sigma_0, n)$  mediante le quali è possibile ricostruire l'andamento delle curve  $L-h$ . Il problema vero di questo modo di procedere è che comunque il costo computazionale complessivo non è banale: l'applicazione della IP adottando questo approccio nel secondo livello di interpolazione richiede infatti un tempo superiore a quello richiesto dalla polinomiale

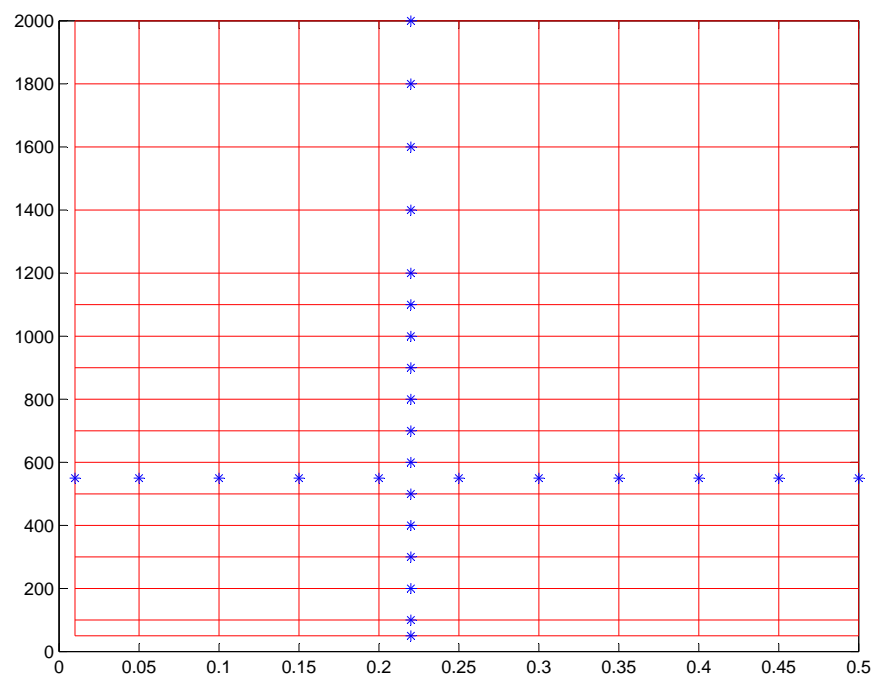


Figura 3.20: Utilizzo del reticolo di funzioni spline

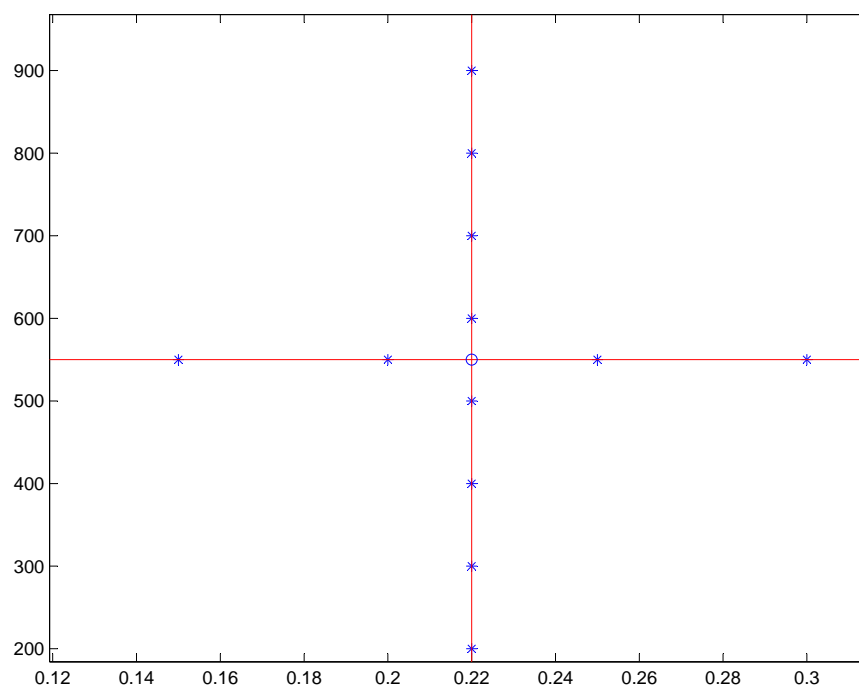


Figura 3.21: Valutazione delle funzioni nel punto desiderato

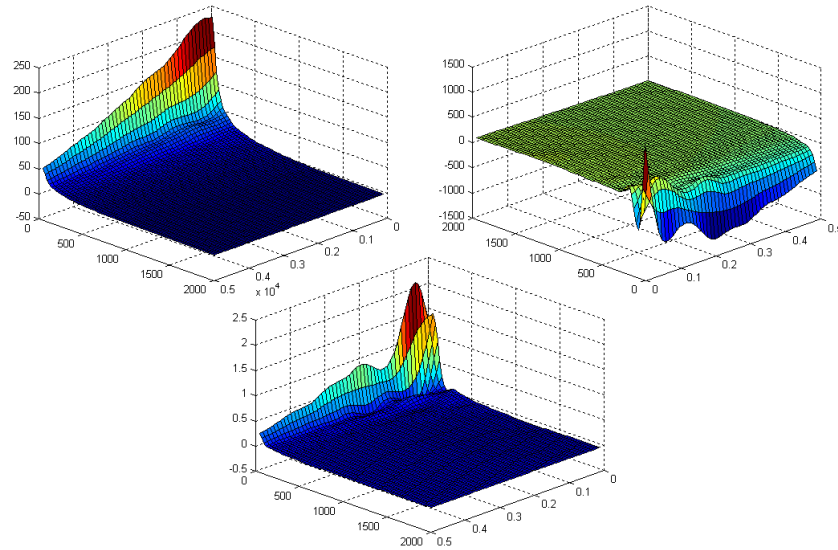


Figura 3.22: Andamento di  $B_k(\sigma_0, n)$  ricostruito mediante funzioni spline

vista al paragrafo precedente. Tuttavia, almeno dal punto di vista dell'accuratezza, un certo guadagno sembra esserci, anche se non è esplicitamente calcolabile. Infatti, i punti del dominio in cui è possibile effettuare il confronto tra valori teorici e reali sono proprio i punti attraverso cui è stato imposto di far passare le funzioni spline del reticolo principale, per cui le curve ricostruite risulteranno identiche a quelle ottenute dall'applicazione diretta del solo primo livello di interpolazione.

In fig.3.22 si riporta l'andamento delle mappe di fig.3.18 ricostruite mediante la procedura appena descritta. Si osservi la capacità di riprodurre correttamente anche locali irregolarità senza pregiudicare la regolarità globale della funzione.

### 3.5.2 Interpolazione mediante funzioni polinomiali locali

Si passa ora a descrivere un altro approccio, basato sull'utilizzo di funzioni polinomiali approssimanti di grado basso e valide solo in un certo intorno del punto considerato.

Si assuma ancora una volta di voler determinare la curva  $L-h$  teorica del materiale avente  $\sigma_0 = 550$  ed  $n = 0.22$ . La procedura di calcolo dei coefficienti  $B_k$  è così articolata:

1. per prima cosa è necessario individuare i valori  $\sigma_0$  ed  $n$  mappati nel database che più si avvicinano a quelli dati. Al riguardo, è stata sviluppata una apposita funzione Matlab, denominata `findIndex`

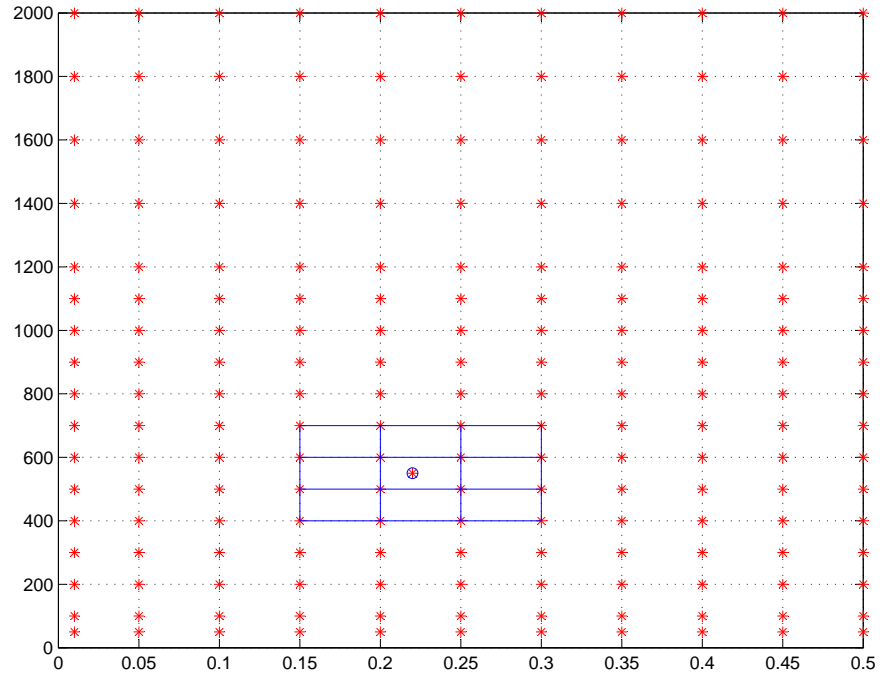


Figura 3.23: Interpolazione locale mediante funzione polinomiale

2. si procede poi col prendere in esame i due valori superiori ed i due inferiori più prossimi a quelli dati, in modo da definire una mini-griglia 4x4 di punti da interpolare (fig.3.23)
3. una volta individuato il sottoinsieme del dominio sul quale è necessario operare l'analisi di regressione, si procede al calcolo dei coefficienti della funzione polinomiale:

$$B(\sigma_0, n) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij} \cdot \sigma_0^{i-1} n^{j-1} \quad (3.13)$$

In pratica si tratta di determinare 9 coefficienti in modo da minimizzare la somma dei quadrati degli scarti della funzione teorica rispetto ai 16 punti presi in esame.

4. infine, nota la funzione, si possono calcolare i coefficienti  $B_k$  attraverso i quali si può ricostruire la curva teorica  $L-h$ .

L'utilizzo di questo tipo di regressione ha portato enormi benefici dal punto di vista del costo computazionale. Infatti, al contrario di quanto si potrebbe immaginare in prima istanza, l'applicazione ricorsiva di questa procedura all'interno della IP in luogo dell'approssimazione polinomiale globale vista nei paragrafi precedenti ha comportato la riduzione di circa un fattore 4 dei tempi di elaborazione, a parità ovviamente di potenza di calcolo e di passo di

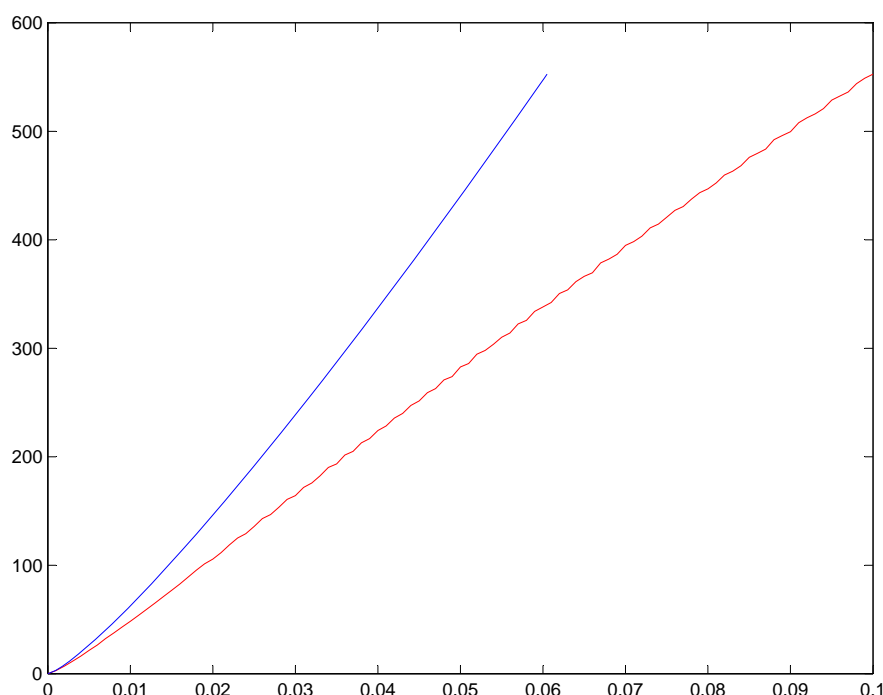


Figura 3.24: Peggior ricostruzione delle curve  $L-h$  con polinomiale locale

campionamento del dominio.

A livello di accuratezza, dato che si tratta comunque di una regressione approssimante, è possibile procedere al calcolo dell'andamento statistico della distribuzione della norma  $\chi$  tra curve FEM e curve teoriche ricostruite.

In tal senso purtroppo, i risultati sono poco incoraggianti: il valor medio delle tre distribuzioni di acciaio, titanio e alluminio risulta infatti rispettivamente pari a  $1.1064 \cdot 10^{-5}$ ,  $1.2338 \cdot 10^{-5}$  e  $1.3812 \cdot 10^{-5}$ , i quali, se confrontati con quelli riportati al paragrafo 3.4.3, rappresentano un enorme passo indietro. In fig.3.24 si riporta il confronto tra curve  $L-h$  teorica (blu) e FEM (rossa) corrispondenti al massimo valore di  $\chi$  per il titanio. Un risultato del genere è chiaramente inaccettabile.

Ad onor del vero, messa in questo modo, potrebbe sembrare che questo tipo di regressione sia completamente sballata. In realtà, l'alto valore della media è dovuto ai grandi errori di ricostruzione commessi in una ristretta fascia del dominio (fig.3.25), errori che fanno poi sentire tutto il loro peso nel calcolo del valor medio. Lontano da questa fascia, la ricostruzione è più che adeguata (fig.3.26).

E' anche vero poi che non è stato eseguito alcun tipo di sviluppo su questo tipo di funzione, come ad esempio, ricerca di esponenti o basi di funzioni migliori, verifica del numero più adeguato di gradi di libertà, introduzione di coefficienti migliorativi come gli  $U_1$  ed  $U_2$  della 1.7 ecc.... Molto probabilmente, lavorando su alcuni o tutti questi aspetti, sarà possibile ottenere

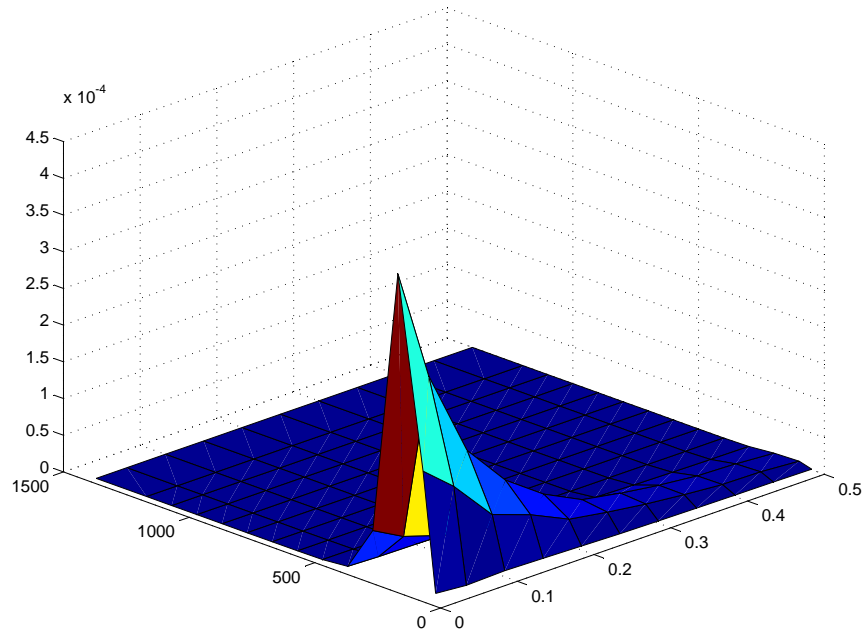


Figura 3.25: Andamento di  $\chi(\sigma_0, n)$  ottenuto con interpolazione polinomiale locale

risultati di ben altro spessore.

Per il momento, tuttavia, non ci si può assolutamente permettere di avere una regione così mal-riprodotta per cui non si farà uso di questo approccio nei futuri sviluppi.

### 3.5.3 Interpolazione mediante rigate

Nei due precedenti sottoparagrafi sono state analizzate due tecniche regressive caratterizzate da vantaggi e svantaggi complementari: se da un lato infatti l'interpolazione mediante funzioni spline garantisce accuratezza di risultati (accuratezza purtroppo non valutabile quantitativamente per i motivi su esposti) a fronte di un costo computazionale abbastanza insostenibile, dall'altro l'interpolazione mediante funzioni polinomiali valide in un ristretto sottoinsieme del dominio si dimostra molto rapida, ma molto poco affidabile.

In questa sede ci si propone di sviluppare una tecnica che unisca i vantaggi delle due procedure appena esposte.

L'idea è quella di utilizzare funzioni valide solo localmente, ma che siano anche perfettamente interpolanti, ovvero che passino per tutti i punti a disposizione.

Al riguardo, il tipo più semplice di funzione che risponde a questi requisiti è una rigata<sup>3</sup>, ossia

<sup>3</sup>Il nome *rigata* è dovuto al fatto che, sezionando la superficie in direzione di uno qualsiasi dei due assi cartesiani, il risultato è sempre una linea retta



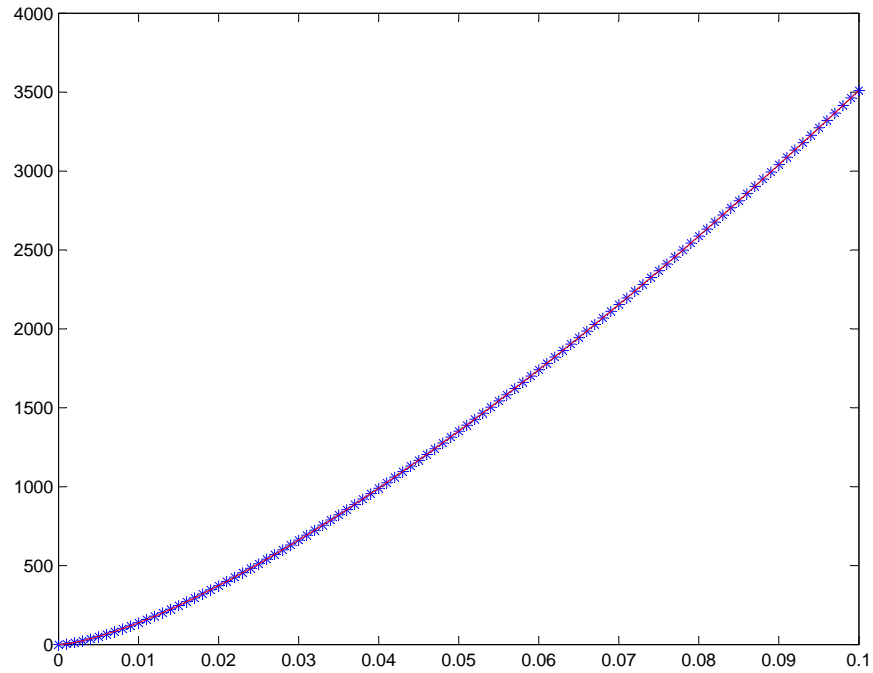


Figura 3.26: Migliore ricostruzione delle curve  $L-h$  con polinomiale locale

una funzione del tipo:

$$B_k(\sigma_0, n) = a_0 + a_1 \cdot \sigma_0 + a_2 \cdot n + a_3 \cdot \sigma_0 \cdot n \quad (3.14)$$

In pratica, fissato un certo punto del dominio, la funzione 3.14 si appoggia sui quattro valori noti che circondano il punto stesso, risultando quindi perfettamente interpolante.

A ben pensarci, è lo stesso tipo di approccio utilizzato dalle funzioni di forma degli elementi finiti piani a quattro nodi: in quel caso infatti, gli spostamenti dei punti interni all'elemento vengono calcolati come medie pesate degli spostamenti nodali, dove il peso è inversamente proporzionale alla distanza del punto rispetto al generico nodo. Se si andasse ad esplicitare il legame funzionale esistente tra spostamenti nodali e spostamento del generico punto interno, il risultato sarebbe proprio una funzione del tipo 3.14.

A livello computazionale, la procedura di ricostruzione della generica curva  $L-h$  procede esattamente come visto al paragrafo 3.5.3, con l'unica differenza che, una volta individuati i valori del database che circondano il generico punto del dominio in esame, vengono considerati solamente i quattro punti più vicini (fig.3.27), sulla base dei quali si costruisce la funzione rigata che li interpola e mediante la quale si risale poi al valore teorico assunto dal generico  $B_k$  in corrispondenza di quel punto.

Rispetto al caso della polinomiale del paragrafo , il costo computazionale diminuisce

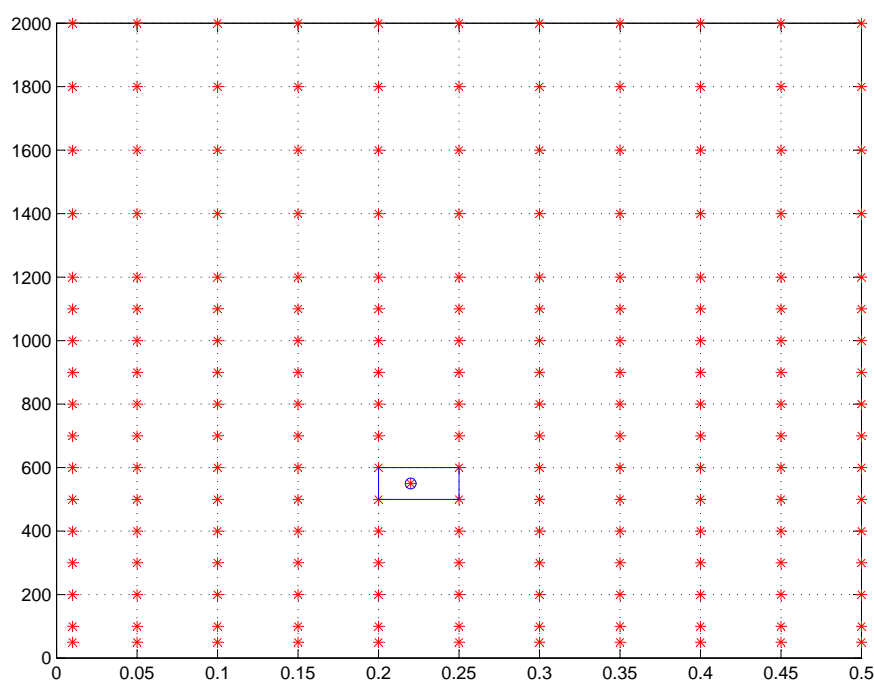


Figura 3.27: Interpolazione mediante funzioni spline

ulteriormente per due motivi:

1. la matrice da invertire ad ogni step è più piccola: si passa infatti da una  $16 \times 9$  ad una  $4 \times 4$
2. la routine Matlab `pinv` che consente il calcolo della pseudoinversa di Moore-Penrose nel caso di matrici rettangolari qualsiasi è sempre più onerosa, a parità di dimensioni della matrice, della routine `inv` che effettua invece l'inversione di matrici quadrate non singolari. Per cui, dato che in questo caso bisogna invertire una matrice  $4 \times 4$ , è possibile ricorrere a questa seconda possibilità, ottenendo un ulteriore risparmio di tempo di calcolo.

In definitiva, rispetto all'approccio con funzione polinomiale locale, il costo computazionale si è ridotto di oltre un fattore 2, cosicchè complessivamente, rispetto alla polinomiale globale, la riduzione è di quasi un fattore 10! Per quanto riguarda la valutazione dell'accuratezza del metodo, purtroppo sussistono gli stessi problemi di quantificazione numerica già incontrati a proposito delle funzioni spline, ossia, poichè i dati del database vengono interpolati in modo perfetto, la verifica non può essere fatta su questi<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Per qualificare la bontà di questo approccio, così come del resto per l'approccio basato su spline, sarebbe opportuno eseguire un certo numero di simulazioni su materiali di Hollomon aventi  $\sigma_0$  ed  $n$  diversi da quelli utilizzati per costruire il DB.

# Capitolo 4

## Analisi Dimensionale

### 4.1 Introduzione

Come visto nel capitolo precedente, la regressione delle curve di indentazione FEM ha raggiunto un livello di precisione e di costo computazionale accettabile per i nostri scopi. Ci sono, però, alcuni inconvenienti legati al suo utilizzo:

- le tre classi di materiali (acciaio, titanio, alluminio) sono trattate nel modello come tre compartimenti stagni
- se ci si trovasse ad indentare un materiale con modulo elastico differente da 70, 115 o 210 GPa (caso più eclatante, indentazione di un acciaio inox con  $E=196$  GPa), non si avrebbero informazioni circa il suo comportamento a meno di non effettuare una onerosa campagna di simulazioni FEM con quel particolare valore di modulo di Young

L'ideale, per risolvere entrambe le questioni, sarebbe quello di avere un'unica formula, o meglio, un unico set di coefficienti, per descrivere il comportamento di tutti i materiali, senza dover necessariamente pre-selezionare un certo valore di  $E$ .

L'idea di primo impulso è stata quella di espandere la 3.12, andando ad aggiungere un ulteriore termine legato proprio al modulo elastico, così da ottenere un'espressione del tipo:

$$B_t = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^3 \beta_{ijk} \cdot \left[ \csc \left( \frac{\sigma_0}{U_1} \right) \right]^{s_{\sigma i}} (n + U_2)^{s_{nj}} \left( \frac{E}{U_3} \right)^{s_{Ek}} \quad (4.1)$$

Si tratta, in pratica, di interpolare con una funzione a tre gradi di libertà (una parabola) il valore assunto, al variare di  $E$ , dal generico componente del vettore  $B$  associato ad una particolare coppia  $\sigma_0$ - $n$  (fig.4.1). In questo modo, l'array  $\beta$  arriva ad assumere dimensione quattro, (ossia si ha un array di dimensione tre per il calcolo di ogni componente del vettore  $B$ ). Al di là della scomodità di maneggiare un oggetto matematico di questo tipo (scomodità che comunque non è

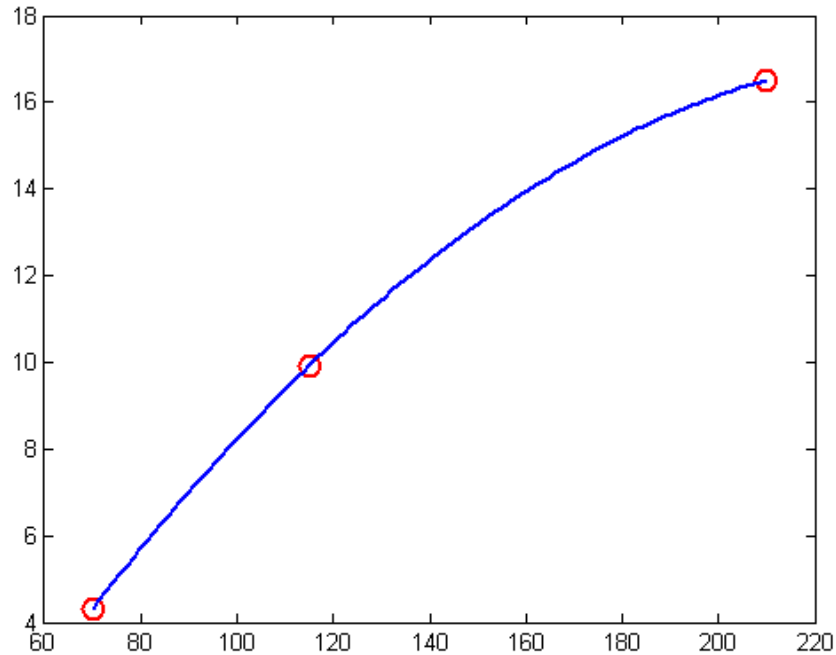


Figura 4.1: Interpolazione modulo elastico

Interpolazione del componente  $B_1$  dei vettori  $B$  associati a  $\sigma_0=400$  MPa e  $n=0.2$  attraverso una parabola

un grosso problema in quanto, una volta implementato nel software, non richiede alcun tipo di intervento durante quello che è l'utilizzo del software stesso), questo approccio presenta alcuni problemi di fondo:

- il database di curve FEM copre un dominio  $\sigma_0$ - $n$  che arriva fino a 2000 MPa per l'acciaio, mentre non va oltre 1400 MPa per il titanio e 1000 MPa per l'alluminio. Pertanto, l'interpolazione del tipo di fig. 4.1 è possibile fino ai 1000 MPa, mentre, per andare oltre, sarebbe necessario o effettuare un nuovo set di simulazioni per eguagliare i vari domini (procedura molto onerosa dal punto di vista computazionale), oppure estrapolare delle curve  $L$ - $h$  teoriche attraverso le funzioni interpolanti (ma l'estrapolazione di funzioni a così elevato numero di gradi di libertà è una procedura tutt'altro che sicura dal punto di vista della qualità dei risultati);
- introdurre un nuovo termine nella 3.12 costringe ad introdurre anche nuovo coefficiente arbitrario  $U_3$  per adimensionalizzare il termine stesso. Quindi nel computo globale entrano tre coefficienti di difficile giustificazione teorica ed anche di difficile valutazione numerica, senza contare il fatto che anche nel termine in cui compare  $L$ , il fattore adimensionalizzante  $ED^2$  è del tutto arbitrario.

Per questi motivi si è deciso di cambiare radicalmente approccio nell'affrontare il problema dell'interpolazione del modulo elastico, andando alla ricerca di una procedura molto più solida dal punto di vista teorico e molto più snella invece dal punto di vista numerico, che permettesse anche un'agevole implementazione dell'interpolazione mediante rigate vista al capitolo precedente.

## 4.2 Analisi dimensionale

### 4.2.1 Illustrazione del problema

Si cerca, in questa sede, di giungere ad una relazione analitica del tipo 3.12 in cui compaia anche una dipendenza funzionale dal modulo elastico, sfruttando i principi dell'analisi dimensionale. Nella forma più generale possibile, il fenomeno che si sta cercando di riprodurre può essere visto come un problema matematico del tipo:

$$f(h, L, \sigma_0, n, E, D) = 0 \quad (4.2)$$

Quindi, in totale, si hanno sei variabili che influenzano direttamente il risultato.

Il teorema  $\pi$  di Buckingham afferma che:

*se un'equazione in cui compaiono  $k$  variabili è dimensionalmente omogenea, è possibile ridurla ad una relazione in cui compaiono  $k - r$  gruppi adimensionali indipendenti, essendo  $r$  il minimo numero di dimensioni fondamentali necessarie per descrivere le variabili.*

La ricerca dei gruppi adimensionali, altrimenti detti gruppi  $\pi$ , può essere fatta attraverso una procedura ben definita, nota come *Metodo delle variabili ripetute*. Uno schema riassuntivo di tale metodo è visibile in fig.4.2(5).

### 4.2.2 Scelta dei gruppi adimensionali

Si procede in questa sede ad applicare passo per passo il metodo appena richiamato e riassunto in fig.4.2.

**Step 1.** E' in pratica quanto fatto per scrivere l'equazione 4.2. Si ricava dunque  $k=6$ .

**Step 2.** Serve per rendersi conto di quante grandezze fondamentali compaiono nel problema. Nel caso in esame si ha:

$$\begin{array}{llll} h = [L] & L = [LMT^{-2}] & \sigma_0 = [L^{-1}MT^{-2}] & \\ n = [] & E = [L^{-1}MT^{-2}] & D = [L] & \end{array} \quad (4.3)$$

Step 1.	List all the variables that are involved in the problem.
Step 2.	Express each of the variables in terms of basic dimensions.
Step 3.	Determine the required number of pi terms.
Step 4.	Select a number of repeating variables, where the number required is equal to the number of reference dimensions (usually the same as the number of basic dimensions).
Step 5.	Form a pi term by multiplying one of the nonrepeating variables by the product of repeating variables each raised to an exponent that will make the combination dimensionless.
Step 6.	Repeat Step 5 for each of the remaining repeating variables.
Step 7.	Check all the resulting pi terms to make sure they are dimensionless.
Step 8.	Express the final form as a relationship among the pi terms and think about what it means.

Figura 4.2: Schema riassuntivo: Metodo delle variabili ripetute

**Step 3.** Nelle sei variabili in gioco compaiono tre grandezze fondamentali: lunghezza, massa e tempo. Il numero di gruppi  $\pi$  necessari è dunque pari a  $k - r = 6 - 3 = 3$ .

**Step 4.** Bisogna scegliere  $r$  variabili ripetute, ovvero tre variabili che compariranno in tutti i gruppi adimensionali con un certo esponente (anche zero). Queste variabili non possono essere scelte a caso: devono infatti esser tali da soddisfare una serie di requisiti, tra cui:

- non possono essere variabili adimensionali, in quanto formerebbero già per conto proprio un gruppo adimensionale
- devono essere dimensionalmente indipendenti, ovvero, se combinate tra loro, non devono dar luogo in nessun modo a gruppi adimensionali
- è fortemente consigliato non scegliere, come variabile ripetuta, la variabile dipendente del problema di base, in questo caso  $h$
- è preferibile scegliere dei parametri costanti che non delle variabili vere e proprie

Nel nostro caso si vede che:

- $h$  e  $D$  sono dimensionalmente identiche, per cui non possono essere scelte entrambe come variabili ripetute, in quanto il loro rapporto formerebbe un gruppo adimensionale. Si sceglie allora  $D$  in quanto  $h$  è la variabile dipendente del problema
- $\sigma_0$  ed  $E$  sono anch'esse dimensionalmente uguali. Sono inoltre entrambe variabili attive. Dovendo scegliere una delle due, si sceglie  $E$
- $n$  è adimensionale. Non può dunque esser scelta come variabile ripetuta.

- rimane da scegliere ancora una variabile ripetuta, e in gioco è rimasta una sola variabile, ovvero il carico  $L$ . Ma questa non può esser scelta come variabile ripetuta in quanto forma, con  $D$  ed  $E$  un gruppo adimensionale:

$$\pi = \frac{L}{ED^2}$$

In questa situazione, il metodo impone di aumentare di uno il numero di gruppi adimensionali (da tre a quattro), in modo da poter diminuire, sempre di una unità, il numero  $r$  di variabili ripetute da selezionare tra quelle di partenza. Dovendo quindi scegliere solamente due variabili ripetute, per quanto appena visto, la scelta ricade su  $E$  e  $D$ .

**Step 5, 6 e 7.** E' giunto il momento di creare i gruppi adimensionali. Anche qui, niente di artistico, ma semplice applicazione di formule matematiche. Le variabili che devono essere adimensionalizzate sono  $L$ ,  $\sigma_0$  ed  $h$  ( $n$ , come detto, è già di per sè un gruppo adimensionale). Senza entrare nei dettagli dei calcoli (per i quali si rimanda a (5), cap.7), non è difficile prevedere che, alla fine, i quattro gruppi adimensionali risulteranno:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{h}{D} \\ \pi_2 &= \frac{L}{ED^2} \\ \pi_3 &= \frac{\sigma_0}{E} \\ \pi_4 &= n\end{aligned}$$

**Step 8.** In conclusione, fissata  $h$  come variabile dipendente, si può scrivere:

$$\frac{h}{D} = f_1 \left( \frac{L}{ED^2}, \frac{\sigma_0}{E}, n \right) \quad (4.4)$$

Il metodo si ferma qui, nel senso che non conduce alla scrittura di una vera e propria espressione matematica che lega i vari gruppi adimensionali, ma mira solamente a mettere in luce la dipendenza funzionale dei vari parametri.

## 4.3 Funzione polinomiale globale

Una volta messa in luce la dipendenza funzionale dei diversi gruppi adimensionali, sta poi a noi trovare l'espressione matematica migliore, capace di legare in modo corretto i gruppi. La ricerca di solito passa attraverso conoscenze fisiche pregresse ed esperienze di laboratorio. Nel nostro caso, ciò di cui si dispone è il database di curve di indentazione simulate al calcolatore, e quelle rappresentano dunque il punto di partenza.

Prima di tutto, però, si considerino le espressioni 3.10 e 3.12, di seguito riportate:

$$\frac{h}{D} - B_0 \cdot \left( \frac{L}{E \cdot D^2} \right)^{\frac{2}{3}} = \sum_{k=1}^3 B_k \cdot \left( \frac{L}{E \cdot D^2} \right)^{r_k}$$

$$B_k = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \beta_{ijk} \cdot \left[ \csc \left( \frac{\sigma_0}{U_1} \right) \right]^{s_{\sigma i}} (n + U_2)^{s_{nj}}$$

Sostituendo nella 3.10 l'espressione di  $B_k$  dalla 3.12 ed esplicitando il termine  $h/D$ , si ha dunque:

$$\frac{h}{D} = B_0 \cdot \left( \frac{L}{E \cdot D^2} \right)^{\frac{2}{3}} + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^3 \beta_{ijk} \cdot \left[ \csc \left( \frac{\sigma_0}{U_1} \right) \right]^{s_{\sigma i}} (n + U_2)^{s_{nj}} \left( \frac{L}{E \cdot D^2} \right)^{r_k} \quad (4.5)$$

Si noti come, ponendo  $U_1 = E$  e  $U_2 = 0$ , si otterrebbe proprio una relazione del tipo 4.4. Tuttavia questa, per come è stata impostata ed ottenuta nel capitolo precedente, è valida solamente per un particolare valore di  $E$ , cui è associato un ben preciso array  $\beta$ . In questo modo si riesce a riprodurre il comportamento delle curve  $L-h$  simulate al calcolatore per l'acciaio, il titanio o l'alluminio.

D'altra parte, l'analisi dimensionale sviluppata al paragrafo precedente afferma che deve esistere una relazione che lega i quattro gruppi adimensionali  $h/D$ ,  $L/(ED^2)$ ,  $\sigma_0/E$  ed  $n$ .

L'idea è allora quella di vedere se la 4.5, con  $U_1 = E$  e  $U_2 = 0$ , può essere utilizzata in tal senso. Per far ciò, si prova ad applicare la stessa struttura matematica vista precedentemente, basata sul doppio livello di interpolazione, andando però ad effettuare l'analisi di regressione non sulle curve  $L-h$  associate ad una particolare classe di materiale (ossia ad un particolare valore di  $E$ ), bensì su *tutte* le curve numeriche di cui si è in possesso.

Si tratta in pratica di smettere di considerare tre domini  $\sigma_0-n$  diversi, associati ognuno ad un particolare valore di  $E$ , e di cominciare invece ad assumere un unico dominio  $\pi_3 - \pi_4$ , ovvero  $\sigma_0/E - n$ , ad ogni punto del quale è associata una particolare curva di indentazione descritta dalla coppia di vettori  $\pi_1 - \pi_2$ , ovvero,  $h/D - L/(ED^2)$ .

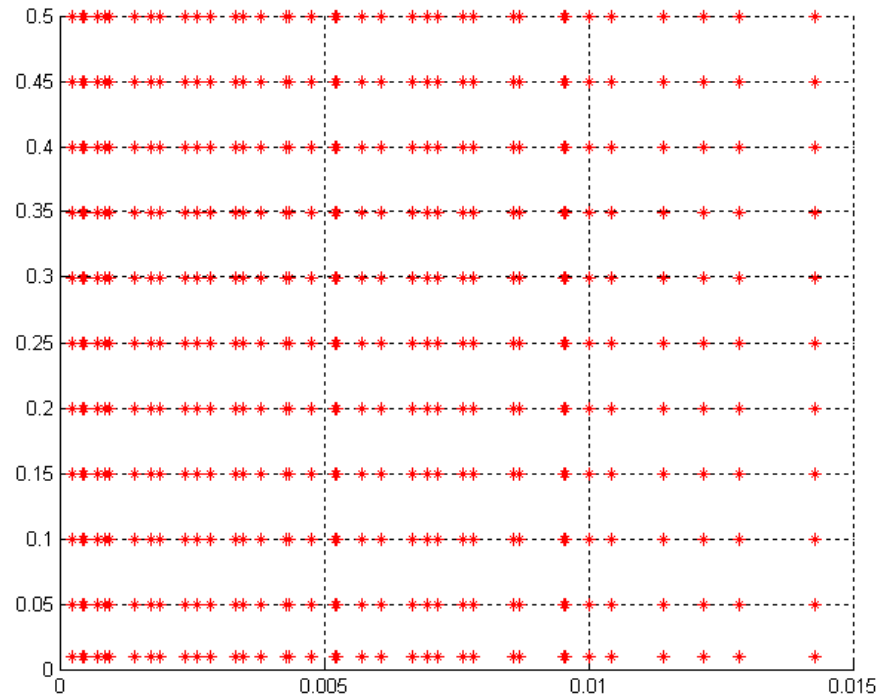
Per prima cosa, si applica la 3.10. Si noti che  $B_0$ , per come è stato impostato, è esplicitamente dipendente da  $E$ , ma non ha alcuna dipendenza invece da  $\sigma_0$  o da  $n$ .

$$\pi_1 = B_0 \cdot \pi_2^{\frac{2}{3}} + \sum_{k=1}^3 B_k \cdot \pi_2^{r_k} \quad (4.6)$$

Si procede quindi al calcolo del vettore dei coefficienti  $B$  associato ad ogni terna  $E-\sigma_0-n$  esattamente come visto nel capitolo precedente, con l'unica differenza di farlo una volta per tutte per ogni valore di  $\sigma_0$ ,  $n$ , ed  $E$ , o meglio, per ogni valore di  $\pi_3$  e  $\pi_4$ .

A questo punto, sulla scia di quanto fatto in precedenza, si procede a mettere in grafici gli



Figura 4.3: Dominio globale  $\pi_3$ - $\pi_4$ 

andamenti delle tre componenti del vettore  $B$  in funzione, stavolta, proprio di  $\pi_3$  e  $\pi_4$  (fig. 4.4).

Quello che si vede è che, in effetti, queste mappe sono abbastanza lisce, ovvero, seppur con una piccola tolleranza, tutti i valori delle componenti dei vettori  $B$  tendono a giacere sulla medesima superficie, la quale è analiticamente rappresentabile mediante le 3.12. Ciò porta a concludere che questa stessa struttura matematica è effettivamente in grado di rappresentare completamente il fenomeno, nel senso che è in grado di considerare anche la dipendenza funzionale dell'andamento delle curve di indentazione dal modulo elastico.

### 4.3.1 Analisi dei risultati

Come prima verifica, sono state eseguite le simulazioni numeriche del processo di indentazione di materiali di Hollomon aventi tutti  $\sigma_0=600$  MPa,  $n=0.30$ , ma caratterizzati da differenti valori di  $E$ . Il confronto tra le curve numeriche e quelle teoriche è riportato in fig.4.5.

Appurato che in effetti questo sistema funziona, si procede al calcolo della distribuzione della norma di distanza  $\chi$  tra curve teoriche e numeriche.

Innanzitutto, è lecito aspettarsi una certa perdita di precisione da parte del modello, dovuta al fatto che adesso si stanno interpolando una quantità di dati molto più consistenti con un'unica relazione, a differenza di prima dove invece i dati da interpolare erano divisi in tre macroblocchi

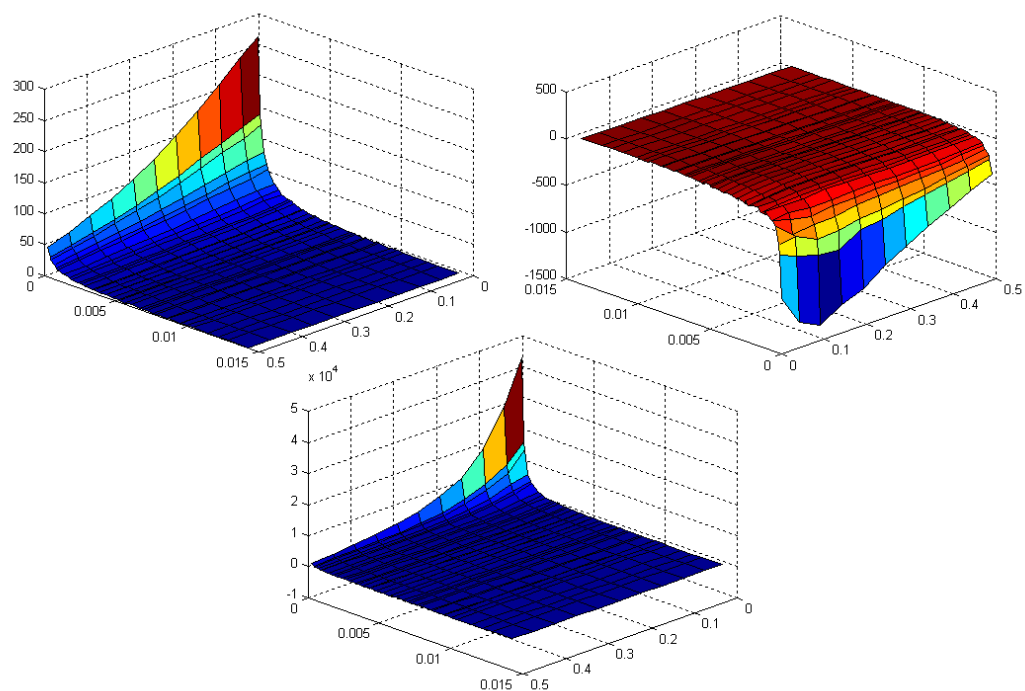


Figura 4.4: Mappe  $B_k$  globali  
Mappe dei coefficienti  $B_k$  della 1 interpolazione in funzione di  $\pi_3$  e  $\pi_4$

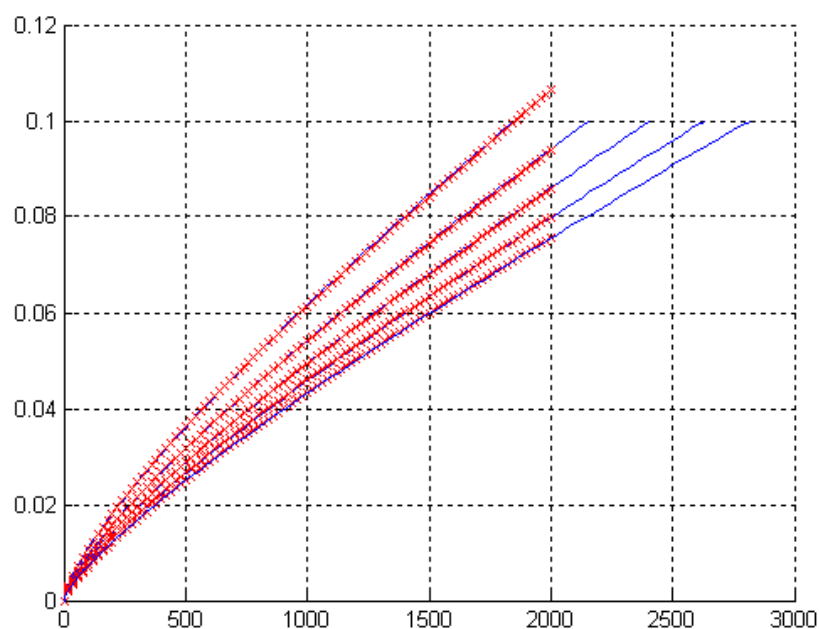


Figura 4.5: Curve  $L-h$  per  $E$  intermedi  
Confronto tra curve teoriche (blu) e numeriche (rosse) di curve  $L-h$  con stessi valori di  $\sigma_0$  ed  $n$  e valori di  $E$  variabili tra 80 e 200 GPa con passo 30 GPa

ad ognuno dei quali era assegnato un ben preciso set di coefficienti numerici.

In fig.4.6 si riporta l'andamento statistico della norma  $\chi$  di tutto il database.

Già i valori visibili in ascissa mostrano un sostanziale aumento dell'errore, e infatti il valore

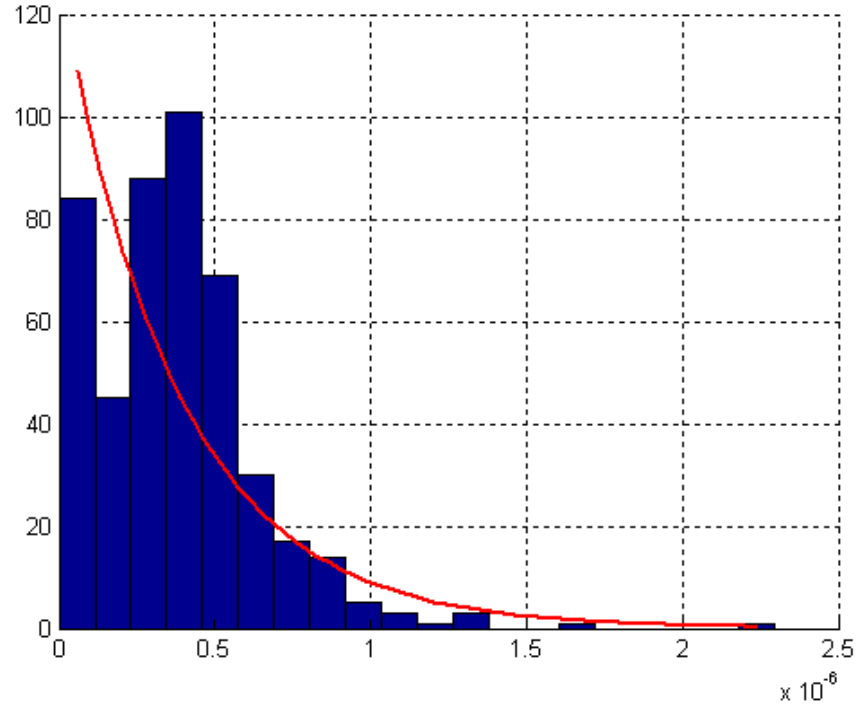


Figura 4.6: Istogramma norma  $\chi$

della media della distribuzione è pari a  $3.772 \cdot 10^{-7}$  che, a cospetto del valore  $8.598 \cdot 10^{-9}$  raggiunto nel capitolo precedente, è di quasi due ordini di grandezza superiore.

Premesso che, come detto poc'anzi, raggiungere quel livello di precisione non sarà possibile, si può comunque intervenire per migliorare un pò le cose.

Assodato che la struttura analitica del modello è in grado di riprodurre correttamente il fenomeno, ed i risultati dei capitoli precedenti ne sono testimoni, si è pensato allora di andare ad agire sugli unici elementi arbitrari introdotti nella formula interpolatoria, ossia il coefficiente  $B_0$  ed i vettori degli esponenti. In particolare, si è effettuata una nuova ricerca di possibili vettori di esponenti, sulla base della tecnica di modulazione vista al capitolo precedente (eq.3.11) trovando così una nuova coppia di vettori.

Oltre a ciò, si è deciso di sostituire la 3.9 con la seguente relazione:

$$B_0 = k \cdot (C_E \cdot E)^{\frac{2}{3}} \quad (4.7)$$

dove cioè si è sostituito 1.04 con una costante  $k$  da modulare per minimizzare la media della distribuzione  $\chi$ .

In particolare, variando  $k$  in un range compreso tra zero e due, si osserva (fig.4.7) un andamento quasi parabolico della media di  $\chi$  rispetto a  $k$ .

Dal grafico si vede come il  $k$  migliore sia vicino a 0.7; più precisamente, andando ad infittire

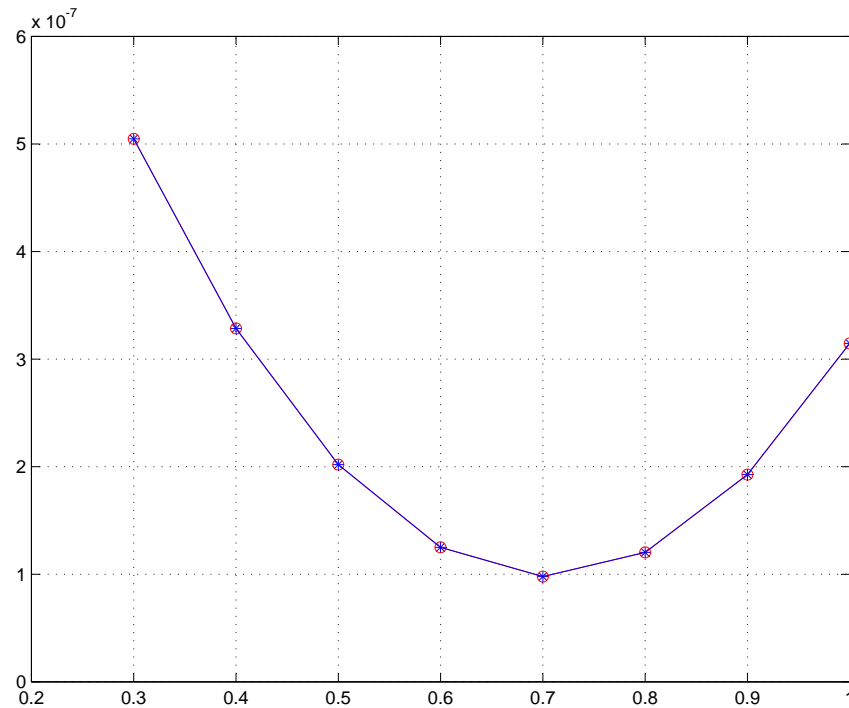


Figura 4.7: Ricerca valore ottimo di  $k$   
Andamento della media di  $\chi$  in funzione di  $k$

nell'intorno del minimo, si osserva che il valore ottimale è pari a 0.705, cui corrisponde un  $\chi$  medio pari a  $9.776 \cdot 10^{-8}$ , valore di quasi quattro volte più piccolo del valore ottenuto con  $k=1.04$  (vedi fig.4.8).

Questi risultati sono dovuti all'effetto "lisciante" che il valore di  $k$  ha sugli andamenti delle mappe di fig.4.4 (vedi fig.4.9, 4.10 e 4.11), effetto che produce quindi differenze molto meno marcate tra i valori calcolati ed i valori numerici dei coefficienti  $B_k$ .

Per completezza, si riportano in fig.4.12 e 4.13 gli istogrammi degli andamenti di  $E_\sigma$  ed  $E_{\sigma\varepsilon}$  risultati dall'applicazione della IP con il modello unificato.

Per quanto riguarda la distribuzione di fig.4.12, media e deviazione standard sono rispettivamente pari a 0.22% e 5.1%, pertanto, al 99% di confidenza, la tensione di snervamento sarà

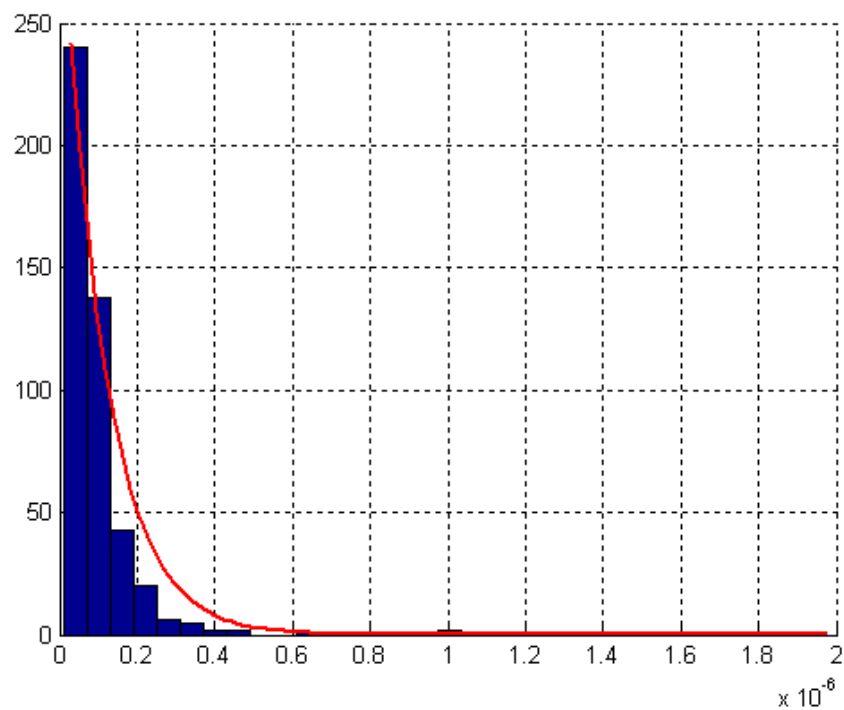


Figura 4.8: Istogramma norma  $\chi$  con  $k=0.705$

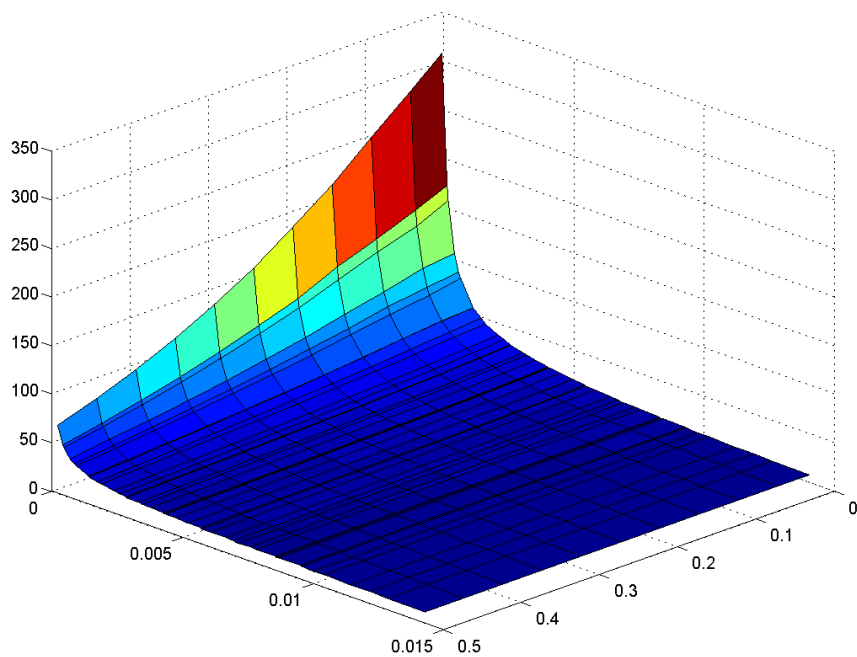
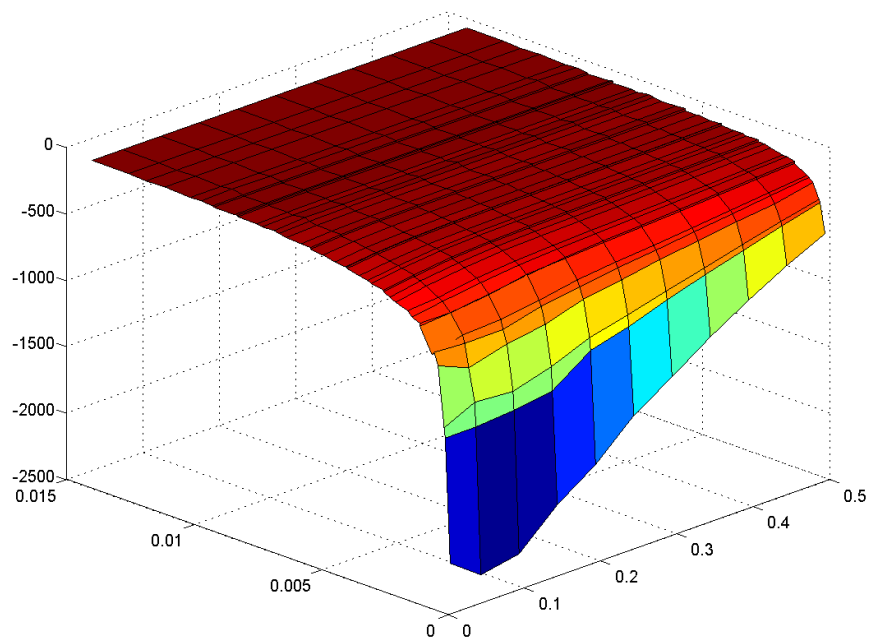
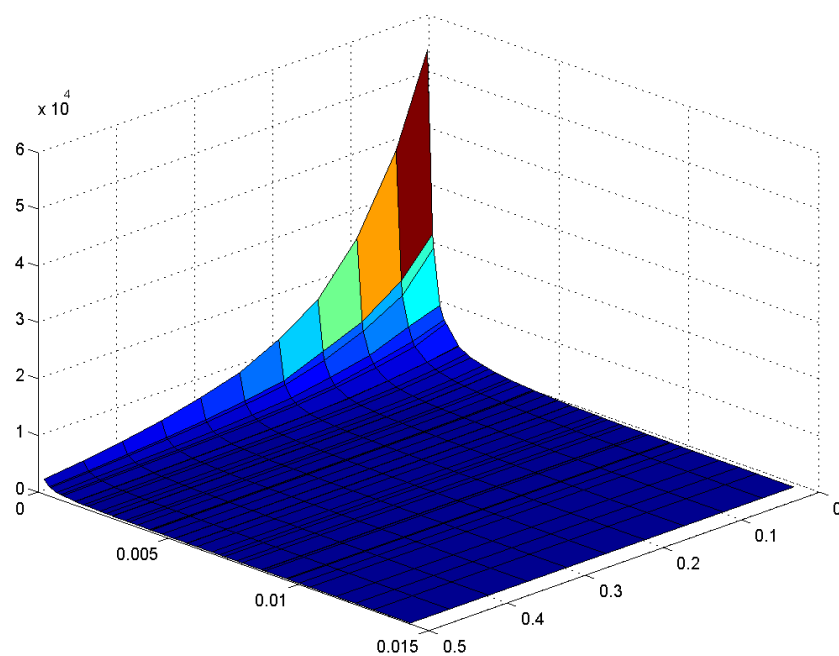


Figura 4.9:  $B_1(\sigma_0, n)$  con  $k = 0.705$

Figura 4.10:  $B_2(\sigma_0, n)$  con  $k = 0.705$ Figura 4.11:  $B_3(\sigma_0, n)$  con  $k = 0.705$

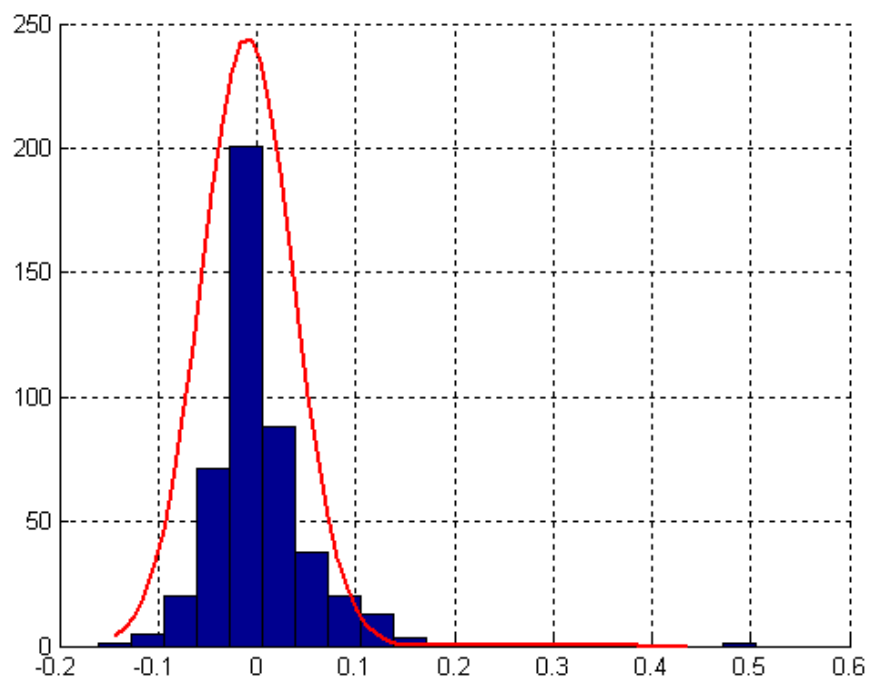
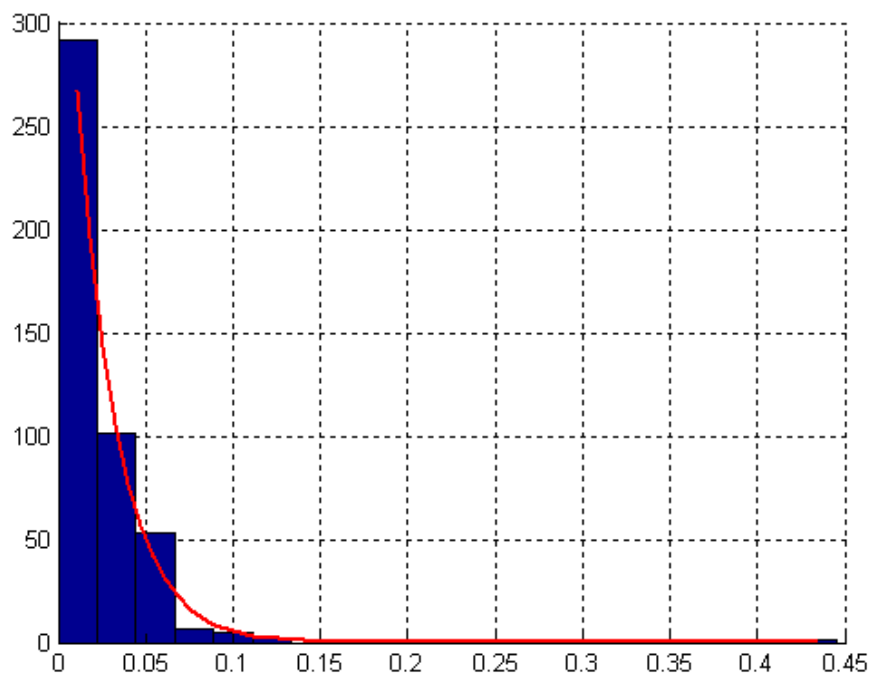
Figura 4.12: Istogramma  $\Delta\sigma_0/\sigma_0$ 

Figura 4.13: Istogramma Errore relativo medio di stima delle curve di trazione

stimata con una incertezza pari a:

$$-12.9\% \leq \frac{\Delta\sigma_0}{\sigma_0} \leq 13.4\%$$

Qui viene fuori la perdita di accuratezza accennata in precedenza, ma al momento è inevitabile dover pagare questo prezzo. Se si ritiene la forchetta troppo ampia, l'unica strada è abbassare il livello di confidenza: ad esempio, al 95%, l'incertezza sulla stima è compresa tra -9.8% e 10.2%. Per quanto riguarda invece la distribuzione di fig.4.13, la media risulta pari a 0.023, cosicchè, al 99%, lo scarto sarà compreso tra 0 e 0.106, mentre al 95% il limite superiore si abbassa a 0.069. Nelle fig.4.14 e 4.15 si riportano le coppie di curve  $\sigma - \varepsilon$  che presentano lo scarto reciproco più prossimo rispettivamente a 0.106 e 0.069 tra tutte quelle del database.

Preme precisare che, per i tre materiali dei quali si conoscono le curve  $L-h$  numeriche, non ha

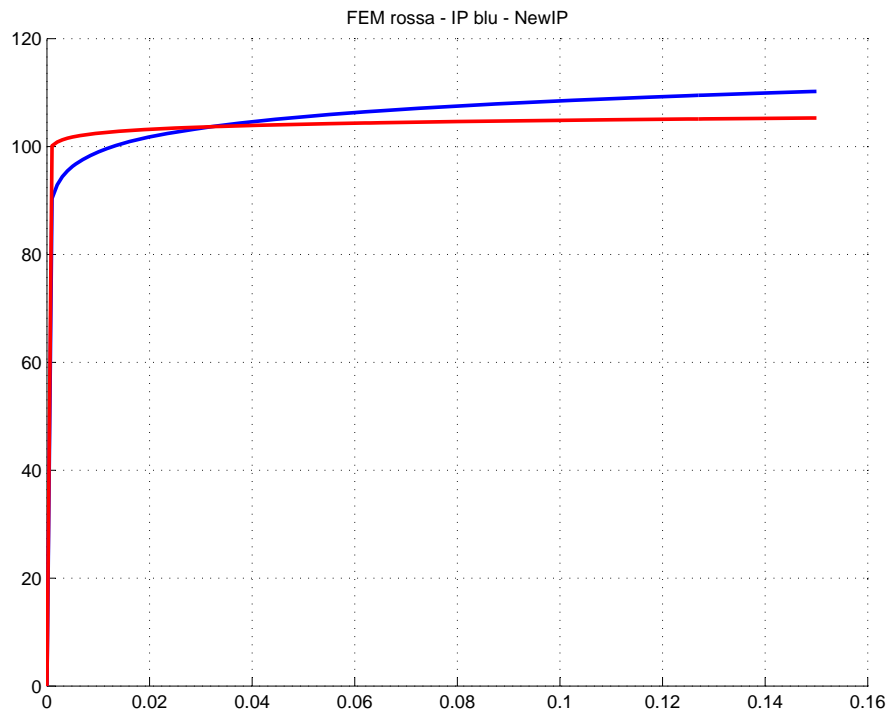


Figura 4.14: Curve di trazione reale stimata corrispondenti  $E_{\sigma\varepsilon}=0.104$

senso utilizzare questa versione del modello, in quanto se ne conosce una ancora più precisa che è quella sviluppata al capitolo precedente. La vera importanza di questa versione del modello sta invece nel fatto di poter comunque procedere all'indentazione, e soprattutto alla successiva fase di interpretazione dei dati sperimentali, di materiali aventi anche modulo elastico diverso dai tre valori canonici 70, 115 e 210 GPa, come accade ad esempio nel caso degli acciai inox.



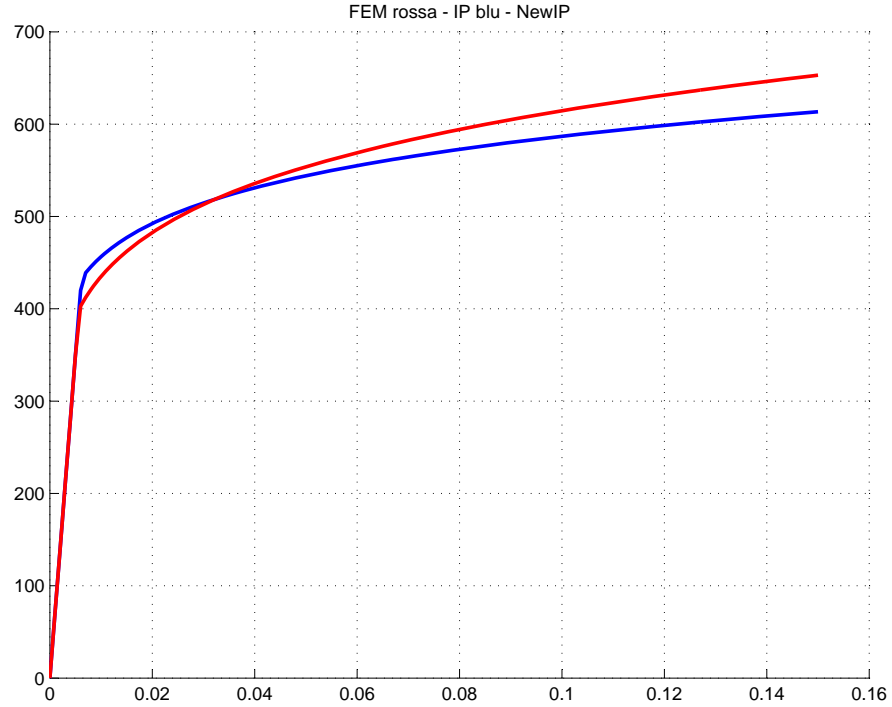


Figura 4.15: Curve di trazione reale stimata corrispondenti  $E_{\sigma\epsilon}=0.0675$

## 4.4 Interpolazione mediante rigate

Nel capitolo precedente sono stati illustrati una serie di importanti vantaggi dovuti all'introduzione di un approccio interpolatorio basato sull'utilizzo di funzioni cosiddette rigate, ossia funzioni di  $\sigma_0$  ed  $n$  valide solo in un ristretto sottoinsieme del dominio, e caratterizzate dalla seguente espressione analitica:

$$B_k(\sigma_0, n) = a_0 + a_1 \cdot \sigma_0 + a_2 \cdot n + a_3 \cdot \sigma_0 \cdot n$$

In questa sede ci si propone di applicare questa tecnica anche alle superfici di fig.4.9, 4.10 e 4.11.

L'utilizzo delle rigate diventa addirittura necessario in sede di analisi progressiva e laddove sia necessario considerare solo parte delle curve di indentazione del database: infatti, come già visto anche nel capitolo precedente, il prendere in esame solo un sottoinsieme del DB provoca una certa perdita di regolarità delle mappe  $B_k$ , soprattutto in corrispondenza di bassi valori di  $\sigma_0$  ed  $n$ . Andare poi a mettere insieme le mappe di tutti i materiali del DB, indipendentemente dal valore del modulo elastico non fa che esasperare questo problema, rendendo di fatto l'interpolazione

polinomiale globale quasi inutilizzabile almeno in una certa fascia del dominio<sup>1</sup>.

Prima, però, di poter implementare le funzioni rigate è necessario operare un pre-trattamento dei dati di ingresso. Infatti, la variabile indipendente  $\sigma_0$  ora è rimpiazzata da  $\pi_3$ , ovvero  $\sigma_0/E$ . Ma, essendo  $E$  dell'acciaio esattamente pari al triplo di  $E$  dell'alluminio, esistono diversi “doppioni” di  $\sigma_0/E$  cui corrispondono differenti, seppur simili, valori di  $B_k$ .

A livello grafico, queste singolarità sono dei veri e propri piccoli gradini nella superficie, gradini che non possono essere riprodotti matematicamente: infatti, a quel particolare valore di  $\pi_3$  sarebbero associati infiniti possibili valori di  $B$ .

Inoltre, non esiste nemmeno la possibilità di calcolare i coefficienti della rigata che si appoggia su quattro punti allineati a due a due in direzione  $z$ : la matrice da invertire per calcolarli è infatti singolare.

Per cui, è necessario eliminare a monte questa anomalia attraverso un'operazione di *merging*, ossia di fusione dei due differenti  $B$  associati a quel particolare valore di  $\pi_3$  in un unico  $B$  dato dalla media dei due (fig.4.16). In fig.4.17, 4.18 e 4.19 si riportano le mappe delle figure da 4.9 a

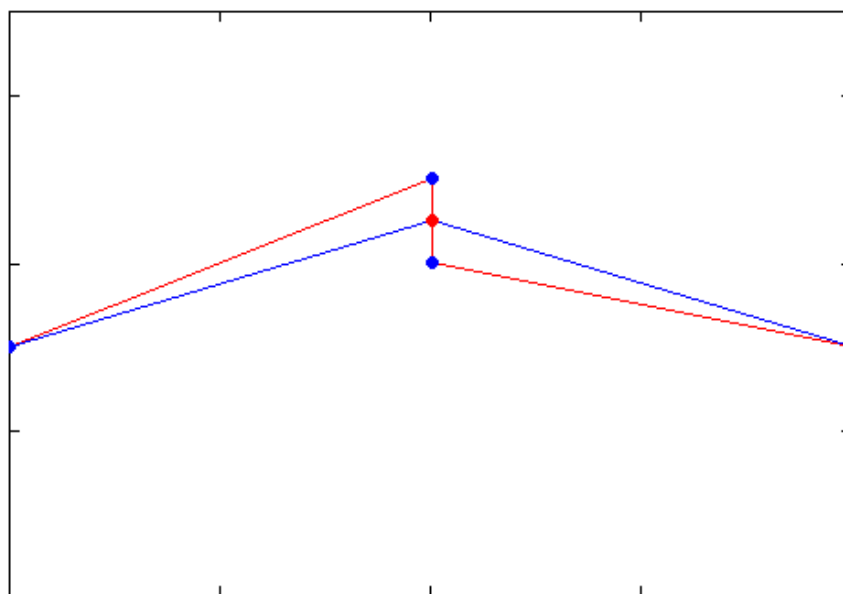
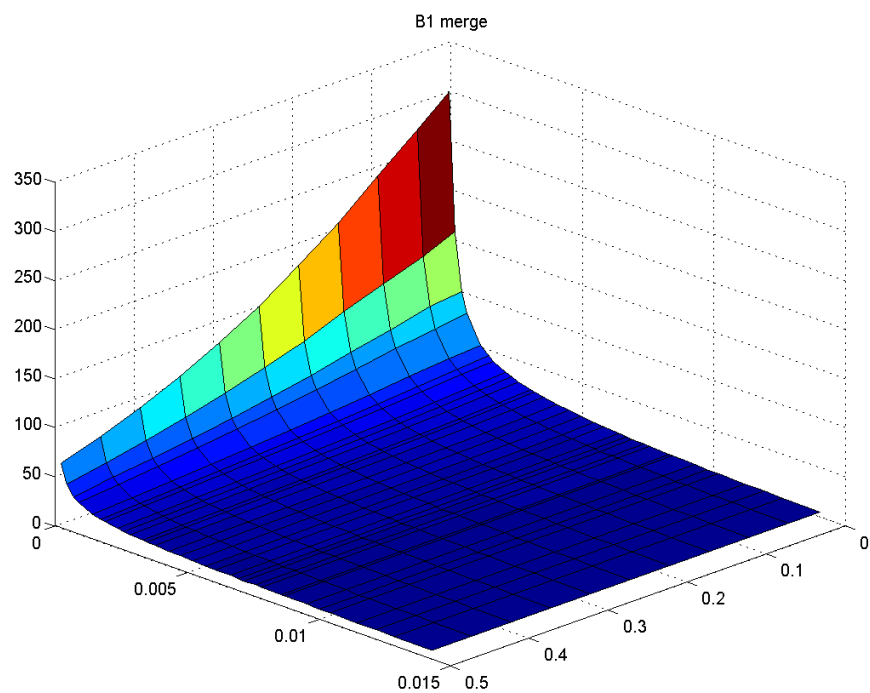
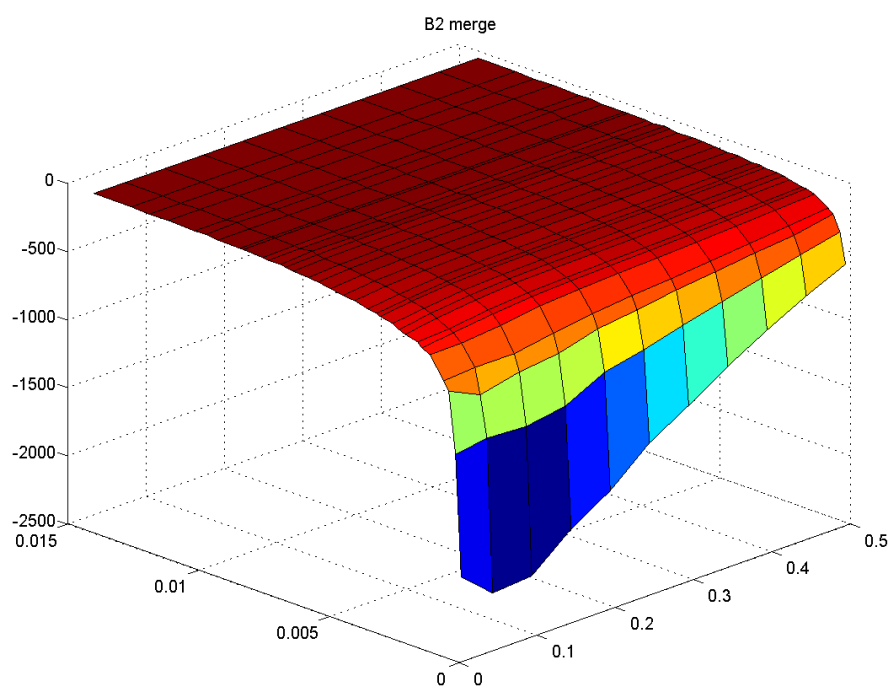


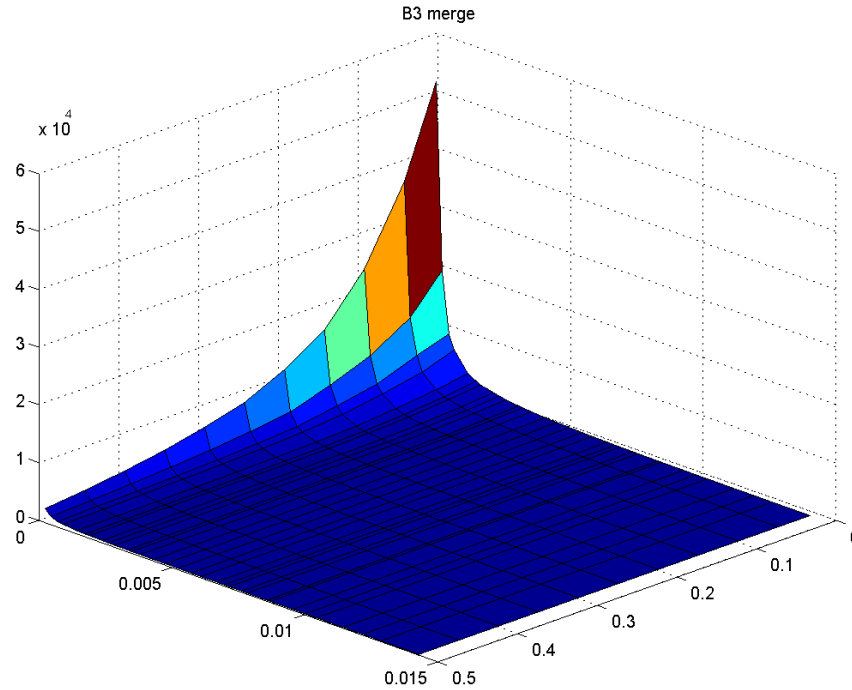
Figura 4.16: Eliminazione singolarità  
Andamento qualitativo della funzione prima del merge (rossa) e dopo (blu)

4.11 dopo l'applicazione di questo pre-trattamento.

A livello pratico, quello che si fa è fissare una tolleranza di soglia per la distanza tra due valori consecutivi di  $\pi_3$ : se inferiore, si applica il merge, altrimenti no.

<sup>1</sup>C'è da dire che la conoscenza del comportamento ad indentazione di un acciaio o di una lega di titanio che snerva a 50 MPa è più una curiosità teorica che non un'esigenza pratica, per cui, all'occorrenza, si potrebbe tranquillamente eliminare questa zona del dominio qualora lo si ritenesse opportuno

Figura 4.17:  $B_1(\sigma_0, n)$  dopo mergeFigura 4.18:  $B_2(\sigma_0, n)$  dopo merge

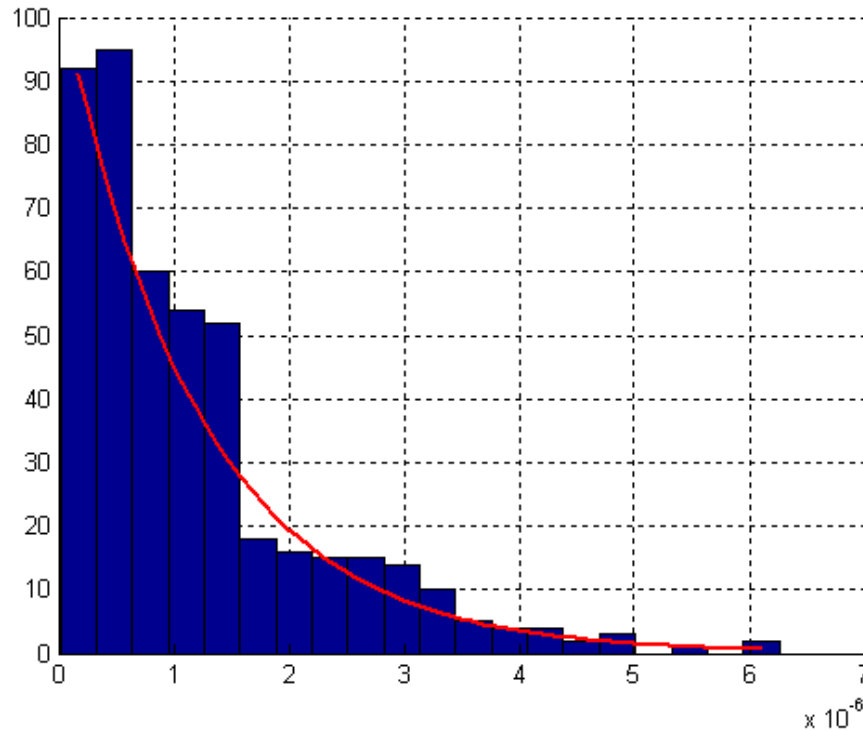
Figura 4.19:  $B_3(\sigma_0, n)$  dopo merge

Una volta applicato il merge, l'interpolazione mediante rigate può procedere come descritto nel paragrafo 3.5.3, senza alcuna difficoltà concettuale aggiuntiva.

A differenza di quanto detto precedentemente, è opportuno in questo caso operare la verifica finale della qualità del modello: infatti le rigate sono sì interpolanti in modo perfetto, ma i punti attraverso i quali sono vincolate a passare hanno subito un pre-trattamento che, in linea teorica, potrebbe creare delle discrepanze tra curve FEM e curve teoriche.

In effetti, l'applicazione del merge qualche danno lo fa: infatti l'andamento della norma  $\chi$  è ora quello riportato in fig.4.20. La media della distribuzione esponenziale assume valore prossimo a  $1.1833 \cdot 10^{-6}$ , valore decisamente superiore a quello che si ottiene dall'applicazione della polinomiale ( $9.776 \cdot 10^{-8}$ ). Tagliando il DB a  $50 \mu m$ , le cose migliorano un pò: la media di  $\chi$  si assesta attorno  $3.69 \cdot 10^{-7}$ , ma la polinomiale si comporta comunque meglio (media pari a  $9.48 \cdot 10^{-8}$ ).

In conclusione, si può dire che, allorchè si desidera utilizzare il modello basato sull'analisi dimensionale sviluppata poc'anzi, per il momento è molto più conveniente affidarsi all'interpolazione polinomiale globale la quale, probabilmente, riesce a sopperire alla "ruvidezza" delle superfici  $B_k$ , garantendo così risultati migliori rispetto a quelli ottenibili mediante le rigate che, invece, sono costrette a seguire anche le più piccole asperità dei dati interpolati.

Figura 4.20:  $B_3(\sigma_0, n)$  dopo merge

## 4.5 Utilizzo del nuovo approccio

Per concludere questo capitolo, preme evidenziare come quanto visto nei paragrafi precedenti sia più che altro uno studio di fattibilità dell'approccio basato su gruppi adimensionali, e come inoltre rappresenti il modo per calcolare l'array  $\beta$  "unificato", o i coefficienti di ogni rigata, ma non rispecchia l'effettivo utilizzo che se ne fa.

Nella realtà, quello che conviene fare è continuare a fornire in ingresso alla 4.5 il modulo elastico del materiale indentato ed il diametro della sfera (che è ovviamente noto), e ricavare in uscita i valori di  $\sigma_0$  ed  $n$ , proprio come visto nei primi tre capitoli.

Questo tipo di utilizzo si giustifica in due modi:

1. quando si effettua l'indentazione di un materiale, di sicuro non si va alla ricerca del suo modulo elastico, il quale è noto una volta che lo è la classe di appartenenza del materiale stesso. Quindi, se per esempio si indenta acciaio basso legato, è inutile utilizzare il diap-tometro per cercare di ricavare informazioni sul valore di  $E$  il quale è facilmente reperibile in manuali specializzati dove sono riportati risultati sicuri ed affidabili al riguardo. Quello che invece ha interesse pratico è la ricerca di quei parametri costitutivi che sono direttamente influenzati dai processi tecnologici quali trattamenti termici, incrudimenti,

aggiunta di piccole quantità di elementi di lega, ecc. . . , parametri che sono identificati in tensione di snervamento e coefficiente di incrudimento.

2. già così com'è, la IP richiede un tempo di calcolo di diverse decine di secondi (anche a causa del fatto che, in questa circostanza, la polinomiale risulta molto più accurata ed è quindi preferibile utilizzarla, anche a scapito dell'efficienza computazionale). Ciò può sembrare un ostacolo di poco conto, ma, se si considera che, quando si analizza un materiale, devono essere effettuate almeno 4 o 5 indentazioni con relative inversioni, già si arriva a tempi dell'ordine dei minuti, e se si aggiunge a tutto ciò l'esigenza di dover cercare anche il valore di  $E$ , si rischia concretamente di veder esplodere i tempi computazionali, fino alle decine di minuti per ogni analisi.

Messa così, sembra che l'analisi dimensionale sia servita solo come mero esercizio teorico, in realtà svolge un ruolo fondamentale: infatti, come detto al paragrafo precedente, grazie a questo approccio è possibile svincolare l'array  $\beta$  dal particolare valore di  $E$ , e calcolare invece un array unico, valido per ogni valore non solo di  $\sigma_0$  ed  $n$ , ma anche dello stesso  $E$ .

Perciò, pur restando necessario fornire in input il modulo elastico al modello, esso può assumere qualsiasi valore compreso tra 70 e 210 GPa (oltre questi limiti diventa estrapolazione e i risultati non sono più garantiti), a differenza di prima in cui gli unici moduli elastici selezionabili erano appunto 70, 115 e 210 GPa, cui corrispondevano ben precisi array  $\beta$ . Quindi, ad esempio, se ci si trova ad indentare un acciaio inox avente  $E$  circa uguale a 196 GPa, non è necessario realizzare un'apposita campagna di simulazioni numeriche (che richiede svariati giorni di calcolo), ma è sufficiente inserire il corretto valore di  $E$  nel modello ed effettuare la procedura di inversione.

Un ultimo appunto deve esser fatto riguardo al range di valori di tensione di snervamento: di volta in volta, per evitare di trovarsi ad estrapolare, bisogna selezionare i valori estremi di  $\sigma_0$  in modo da rispettare le seguenti condizioni:

$$\sigma_0^{\min} = E \cdot \pi_3^{\min} \quad \sigma_0^{\max} = E \cdot \pi_3^{\max}$$

Con questo appunto, può dirsi conclusa la fase di sviluppo del software di inversione per materiali di Hollomon. In definitiva, i più importanti risultati ottenuti sono:

- implementazione di una nuova IP molto più razionale ed accurata
- forte incremento della precisione con il quale il modello analitico riesce a riprodurre l'andamento di tutte le curve numeriche  $L-h$
- abbattimento del costo computazionale, soprattutto in riferimento all'interpolazione mediante funzioni rigate

- possibilità di scegliere a piacimento, in un range compreso tra 70 e 210 GPa , anche il valore del modulo elastico  $E$

# Capitolo 5

## Azzeramento dei dati sperimentali

### 5.1 Illustrazione del problema

Fino a questo punto della trattazione sono stati utilizzati dei dati numerici, ovvero ottenuti mediante simulazione al calcolatore del processo di indentazione, al fine di mettere a punto un algoritmo di inversione capace di trasformare la curva  $L-h$  del materiale nella curva  $\sigma - \varepsilon$ . Dopodichè, a riprova dell'efficacia di tale algoritmo, lo si è applicato alle curve FEM stesse, traendone le opportune conclusioni.

Ora è arrivato il momento di provare a dare in pasto all'algoritmo una curva ottenuta dal diaptometro vero e proprio. In fig.5.1 è riportato un tipico grafico  $L-h$  sperimentale che si ottiene in uscita dalla macchina di prova.

Come si può facilmente osservare, è ben diversa da quella che si ottiene dalle simulazioni al calcolatore. In particolare:

1. non parte dall'origine degli assi
2. il tratto ascendente della curva è preceduto un plateau
3. il tratto ascendente è seguito dal tratto discendente, o di scarico

In questo capitolo, ci si preoccuperà di sviluppare un semplice algoritmo che, ricevendo in ingresso la curva sperimentale così come si presenta in fig.5.1, fornisca in uscita una coppia di vettori  $L^{(exp)}-h^{(exp)}$  che possano essere trattati dall'algoritmo di inversione al fine di trarre in uscita le informazioni riguardanti il comportamento a trazione del materiale.

In realtà, ciò non è rigorosamente possibile in quanto sarà preventivamente necessario operare un pre-trattamento dei dati sperimentali, non oggetto di questa tesi, ma che merita menzione per la sua fondamentale importanza che è la calibrazione.

Si tratta di una procedura di correzione dei dati sperimentali attraverso un'opportuna funzione, detta appunto funzione di calibrazione, il cui scopo è principalmente quello di mettere in conto



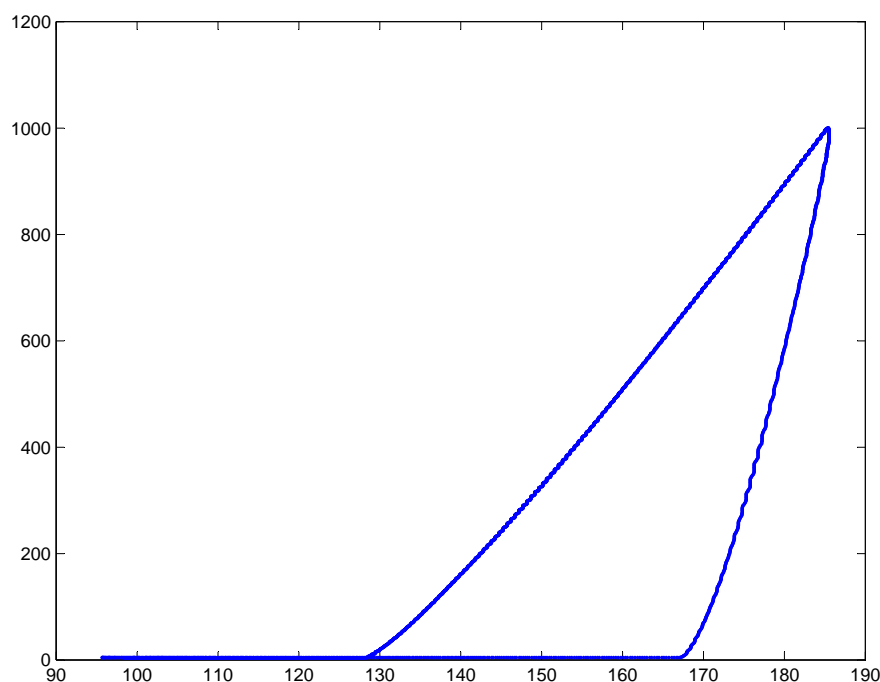


Figura 5.1: Curva sperimentale che si ottiene dal diaptometro

le cedevolezza di tutti i componenti meccanici del diaptometro, le quali vanno a falsare in modo assolutamente decisivo le misure effettuate.

Per calcolare tale funzione è stato necessario reperire un materiale, denominato acciaio inox H13, caratterizzato da un elevatissimo grado di omogeneità ed isotropia. Una volta in possesso di tale materiale, sono state effettuate su di esso delle prove di trazione, al fine di ricavare la sua curva  $\sigma - \varepsilon$ , e delle prove di indentazione per ricavarne la curva  $L-h$ . Successivamente, è stata eseguita una simulazione al calcolatore del processo di indentazione del materiale stesso, dando in ingresso al software di simulazione agli elementi finiti la curva di trazione ricavata dalle prove. Infine è stato eseguito un confronto tra le curve  $L-h$  sperimentale e numerica, in modo da estrarre una funzione che rappresenta, punto per punto, lo scostamento reciproco delle due curve. Tale funzione è proprio la funzione di calibrazione.

A questo punto, trovata la funzione, si considera come esatta la curva  $L-h$  numerica e, laddove il diaptometro fornisca un risultato differente, lo si corregge in modo da far coincidere i dati sperimentali con quelli numerici.

Tale procedura deve essere effettuata per ognuna delle macchine di prova, ed eventualmente ripetuta ogniqualvolta venga smontata e rimontata la testa indentatrice.

Come detto, tuttavia, nel presente capitolo ci si occuperà solamente dell'aspetto dell'azzeramento dei dati sperimentali e si considererà come nota la curva di calibrazione della macchina.

## 5.2 Stima iniziale del punto di azzeramento

Propedeutica alla procedura di azzeramento è la fase di stima iniziale del punto di azzeramento stesso. Questa tecnica permette infatti di ridurre drasticamente i tempi computazionali, senza peraltro dover pagare alcun pegno in termini di precisione.

Dal punto di vista logico, la prima operazione da compiere una volta in possesso di una curva sperimentale del tipo riportato in fig.5.1 è l'epurazione della curva di scarico. Banalmente, è sufficiente impostare una routine di ricerca del valor massimo di  $L$ , routine peraltro già disponibile in Matlab, e, una volta trovato tale massimo, tagliare tutti i dati successivi a questo (nella matrice che si ottiene in uscita dal diaptometro, i dati sono tutti ordinati in ordine cronologico, per cui si può esser certi che la curva di scarico sia rappresentata dalle ultime righe di tale matrice).

Una volta compiuta questa operazione, i dati sperimentali si presentano come in fig.5.2.

Il file che si ottiene dalla prova sperimentale contiene, oltre ai vettori  $h$  ed  $L$ , anche il vettore

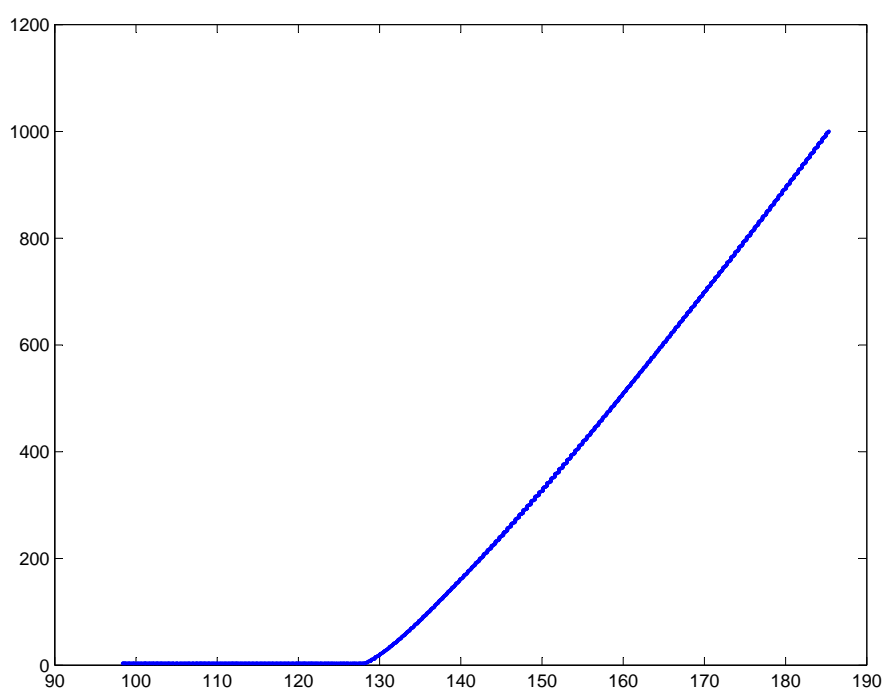


Figura 5.2: Curva sperimentale che si ottiene dal diaptometro epurata della curva di scarico

tempo  $t$ , il quale si rivela abbastanza utile in questa fase. Si consideri il grafico  $L-t$  riportato in fig.5.3, opportunamente ingrandito nei pressi del punto di inizio effettivo dell'indentazione.

Con una finestra mobile si procede ora ad analizzare i dati. In particolare, i dati racchiusi nella finestra vengono interpolati con una retta dei minimi quadrati, della quale viene registrata la pendenza. Quando tale pendenza supera un certo valore di soglia, si può esser sicuri che la prova è effettivamente iniziata, per cui il punto di azzeramento non può trovarsi lontano da qui.

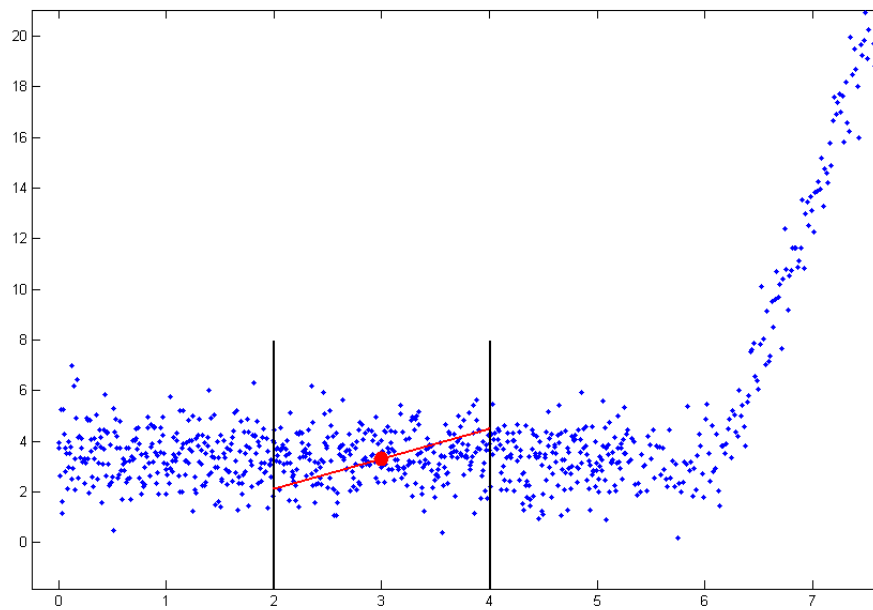


Figura 5.3: Curva  $L-t$  con zoom sul punto di inizio prova

E' proprio nella determinazione del valore di soglia che si rivela particolarmente utile l'utilizzo del vettore tempo in luogo del vettore  $h$ : infatti, la pendenza della curva  $L-h$  nel tratto iniziale dipende in modo molto forte dalle caratteristiche costitutive del materiale indentato, mentre l'andamento  $L-t$  ha un range di variazione molto più ristretto al variare del materiale indentato. Tipicamente, il tratto iniziale può variare tra 10 e 15  $N/s$  a seconda del provino che si sta indentando, per cui si fissa il valore di soglia in 5  $N/s$ , valore abbastanza piccolo da garantire che la prova sia iniziata qualunque sia il materiale in esame, ma anche abbastanza grande da garantire di non essere più nella zona di plateau iniziale.

In fig.5.4 si riporta l'andamento della pendenza della retta per la curva di fig.5.3, ottenuta con una finestra mobile di ampiezza 2 secondi e passo 0.5 secondi.

Una volta trovata la finestra mobile nella quale il valore di pendenza limite viene oltrepassato, dal punto medio in ascissa di tale finestra si fissa un intervallo di  $\pm 2s$  entro cui sarà sicuramente presente il punto di inizio prova (fig.5.5).

## 5.3 Procedura di azzeramento

Dopo il pretrattamento dei dati sperimentali illustrato al paragrafo precedente, i dati da azzerare si presentano nella forma illustrata in fig.5.6.

A questo punto bisogna andare alla ricerca del punto di azzeramento  $(h_0, L_0)$ . L'idea è quella di interpolare i dati sperimentali a sinistra del punto di azzeramento con una retta orizzontale e

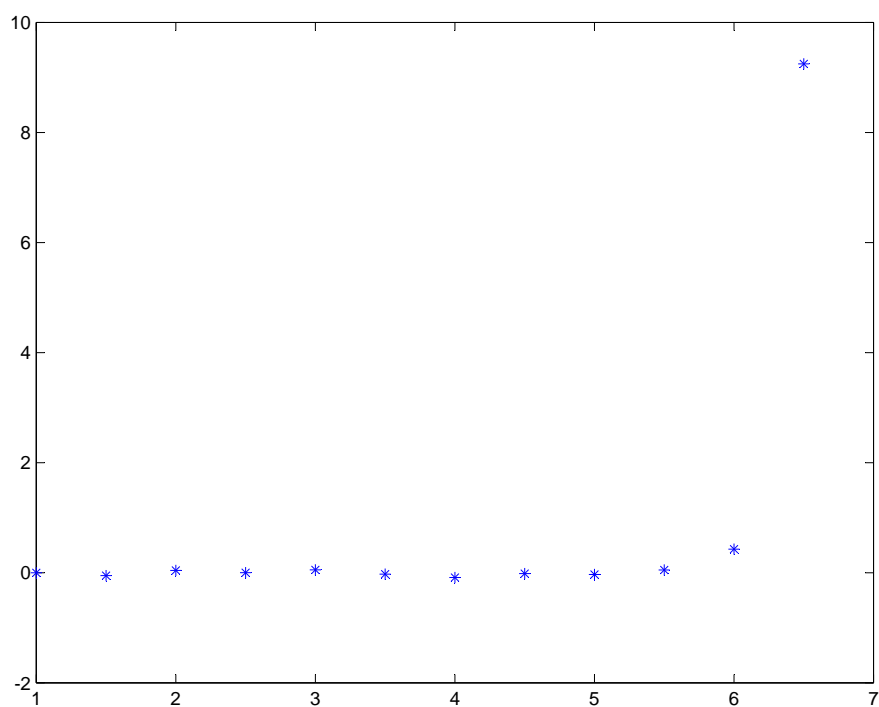


Figura 5.4: Andamento della pendenza della retta interpolante nella finestra mobile

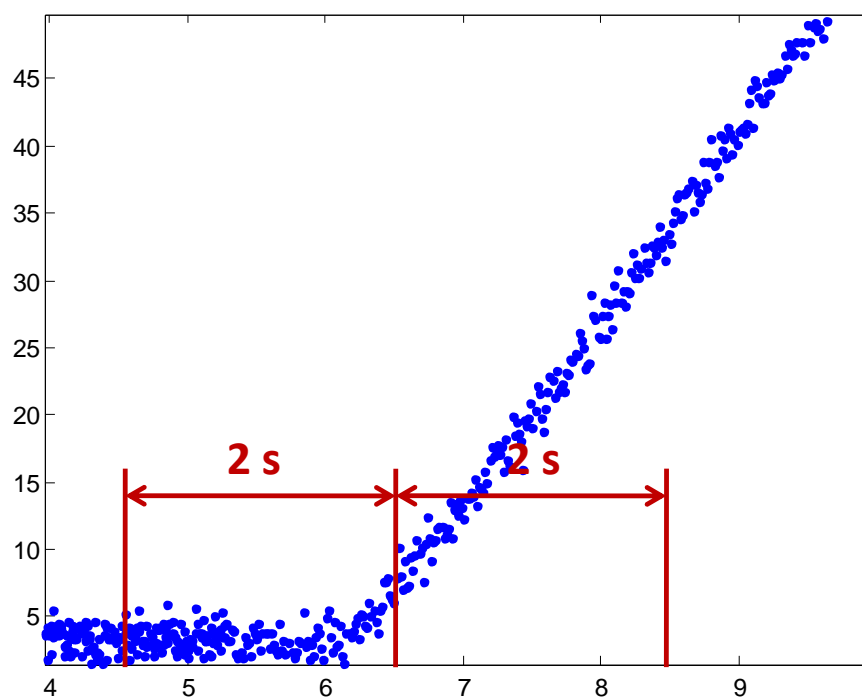


Figura 5.5: Selezione quantità ristretta di dati attorno al punto di inizio prova

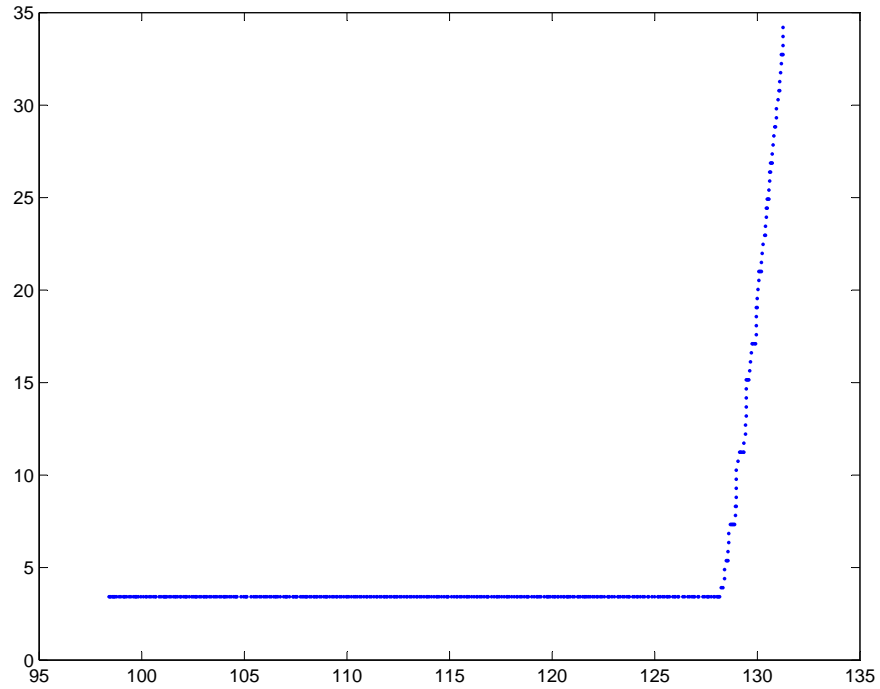


Figura 5.6: Dati sperimentali in ingresso alla procedura di azzeramento

quelli a destra con una funzione polinomiale. Analiticamente si ha:

$$L_{th}(h) = \begin{cases} L_0 & \text{se } h \leq h_0 \\ L_0 + \sum_{i=1}^m A_i \cdot (h - h_0)^{r_i} + A_2 \cdot (h - h_0)^{r_2} & \text{se } h \geq h_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Il problema, però, è che il punto di azzeramento è un'incognita del problema. Quello che si fa allora è ipotizzare di volta in volta un valore di  $h_0$  e calcolare, mediante la 5.1,  $L_0$  e  $L_{th}(h)$ . Dopodichè si procede al calcolo della norma di distanza  $\chi$  tra i dati sperimentali e la funzione teorica appena calcolata. Il valore di  $\chi$  trovato sarà associato al valore  $h_0$  ipotizzato in partenza, per cui, effettuando una serie di tentativi con diversi valori di  $h_0$ , si va alla ricerca del valore che minimizza la norma  $\chi$ , esattamente nello stesso modo in cui opera la IP, con l'unica differenza che in questo caso ci smuove su un dominio monodimensionale.

Per quanto riguarda la funzione polinomiale utilizzata per interpolare i dati a destra di  $h_0$ , valgono le seguenti considerazioni:

1. il numero  $m$  ottimale di termini della sommatoria è due
2. per quanto riguarda gli esponenti  $r_1$  ed  $r_2$ , a seguito di una serie di tentativi si riscontra che si ottengono buoni risultati con 1.5 e 1.7
3. è opportuno lasciare un solo grado di libertà alla funzione interpolante, andando a fissare

a priori il coefficiente  $A_1$ , un pò come visto a proposito del coefficiente  $B_0$  utilizzato per interpolare le curve  $L-h$  FEM del DB. Utilizzando ancora una volta la teoria di Hertz (come già visto al paragrafo 3.3.2) per stabilire il valore più appropriato, si evince che:

$$A_1 = \frac{0.943}{C_E \cdot E}$$

In particolare, relativamente a quest'ultima considerazione, c'è da osservare che  $A_1$  influenza molto fortemente il comportamento della funzione nei pressi dell'origine, dove si ha l'annullamento della pendenza. Lasciando liberi entrambi i coefficienti  $A_1$  ed  $A_2$ , il Normal Equation Method in certi casi va a calcolare dei valori di  $A_1$  anche di quattro o cinque volte maggiori di quelli che si otterrebbero dall'applicazione della teoria di Hertz. Ciò provoca una forma molto "spanciata" della funzione nei pressi dell'origine, dando così luogo a grossi problemi nella determinazione del punto  $h_0$  ottimale (fig.5.7).

Al contrario, imponendo a priori tale coefficiente, la funzione è costretta a partire dall'origine

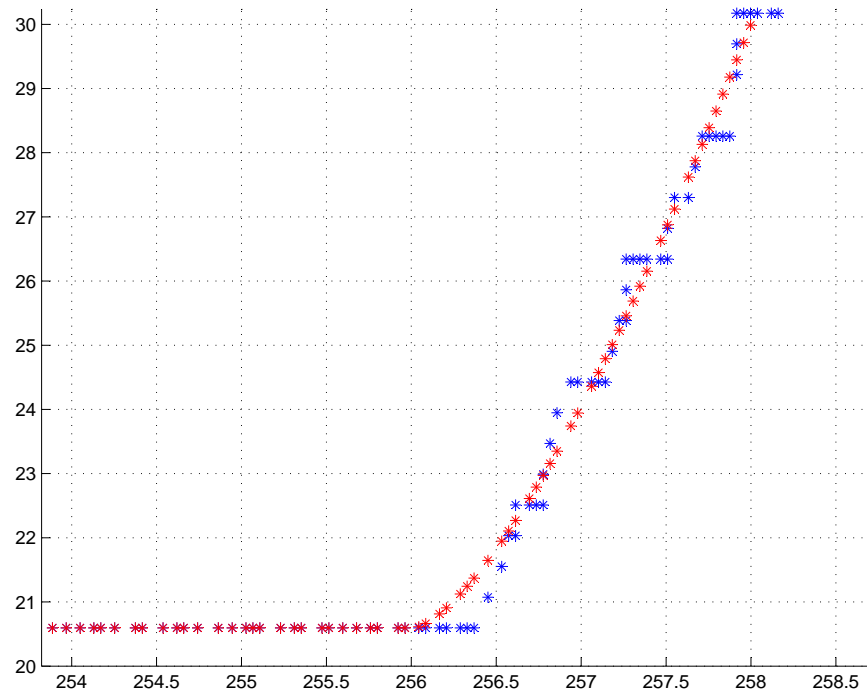


Figura 5.7: Azzeramento con  $A_1$  libero

esattamente come vuole la teoria di Hertz, salvo poi andare successivamente a deviare da questa legge attraverso il suo grado di libertà rappresentato dal termine moltiplicato per  $A_2$ . Questo fa sì che la determinazione del punto  $h_0$  sia molto più affidabile e ripetibile che non in precedenza (fig.5.8).

Trovato  $h_0$ , si conosce anche  $L_0$  grazie alla prima delle 5.1, per cui si può procedere all'azzeramento

Figura 5.8: Azzeramento con  $A_2$  imposto

mento dei dati sperimentali sottraendo questi valori rispettivamente dai vettori  $h^{(exp)}$  ed  $L^{(exp)}$ . In fig.5.9 e 5.10 si riportano rispettivamente il confronto tra dati sperimentali e funzione teorica di best fit, ed i dati sperimentali azzerati.

Per finire, in fig.5.11 e 5.12 si riportano rispettivamente le curve  $L-h$  azzerate e tagliate a  $70\mu m$  relative ad 8 indentazioni, ed i risultati dell'applicazione della IP su tali curve a confronto con le vere curve  $\sigma - \varepsilon$  dell'acciaio inox H13.

## 5.4 Sensibilità della IP al punto di azzeramento

A conclusione di questo capitolo, si vuole mettere in evidenza quanto importante sia la corretta determinazione del punto di azzeramento ai fini della correttezza dei risultati finali.

Si consideri la curva  $L-h$  FEM associata ad un materiale avente  $E=210$  GPa,  $\sigma_0=900$  MPa,  $n=0.25$ . Applicando ad essa la IP, l'algoritmo di inversione restituisce in uscita i valori  $\sigma_0=903$  MPa,  $n=0.2486$ , risultato certamente apprezzabile. In fig.5.13 si riporta il confronto tra le curve di trazione esatta e ricostruita.

A questo punto, si ipotizzi di spostare il punto iniziale della curva  $L-h$ , variando il solo  $h_0$  in un range compreso tra  $-1 \mu m$  e  $+1 \mu m$  con passo  $0.1 \mu m$ . Nelle figure 5.14 e 5.15 si può osservare

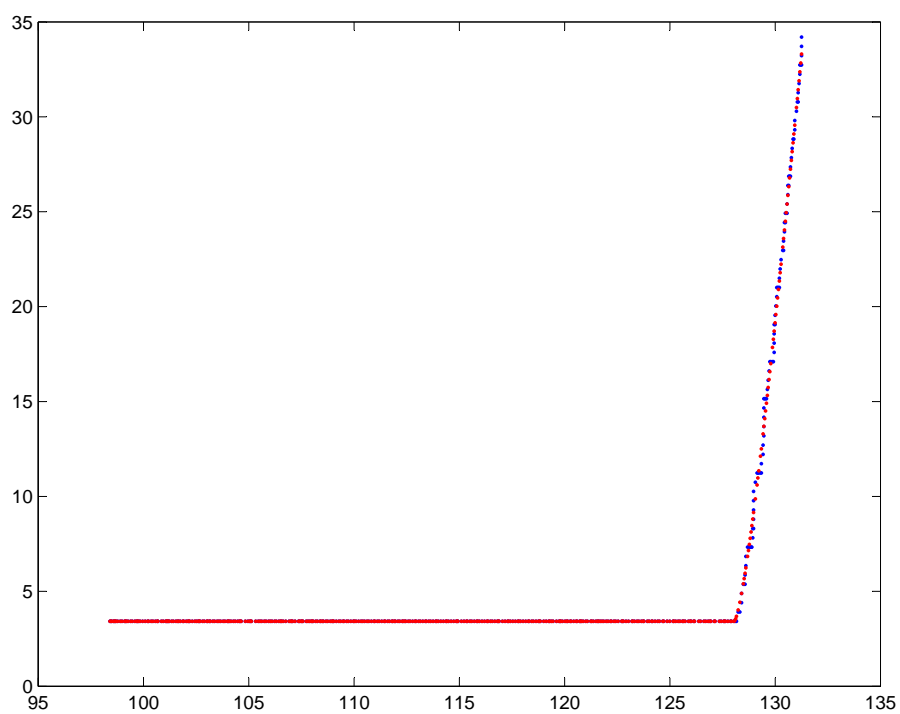


Figura 5.9: Confronto tra dati sperimentali e funzione teorica di best fit

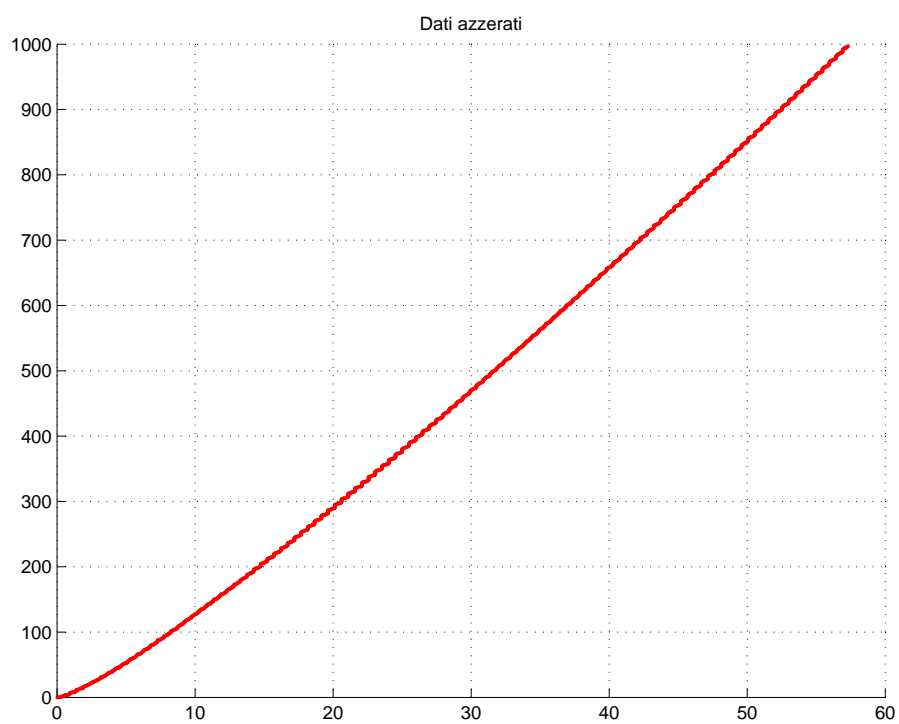


Figura 5.10: Dati sperimentali azzerati



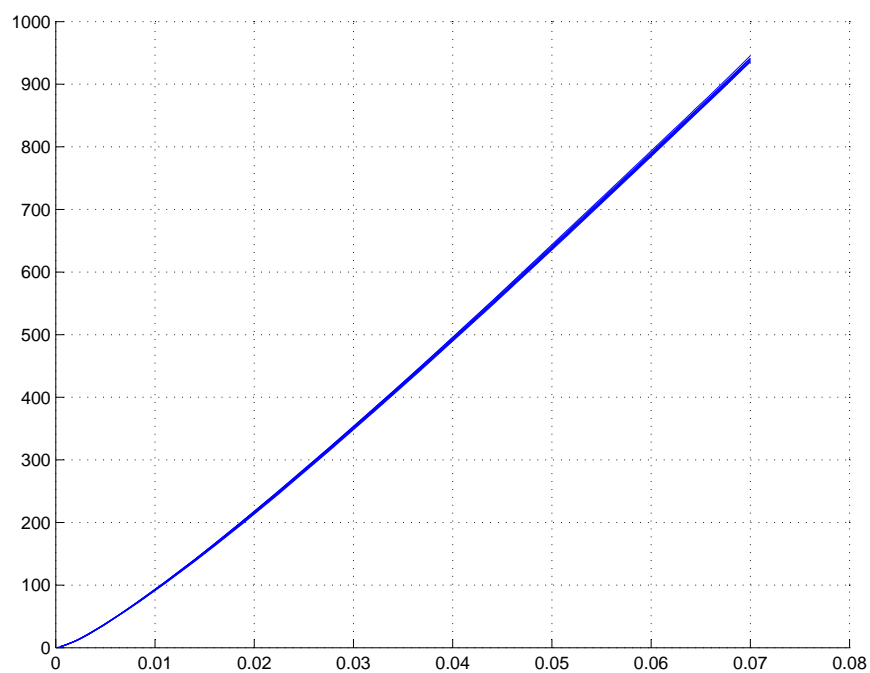


Figura 5.11: Dati sperimentali H13 azzerati

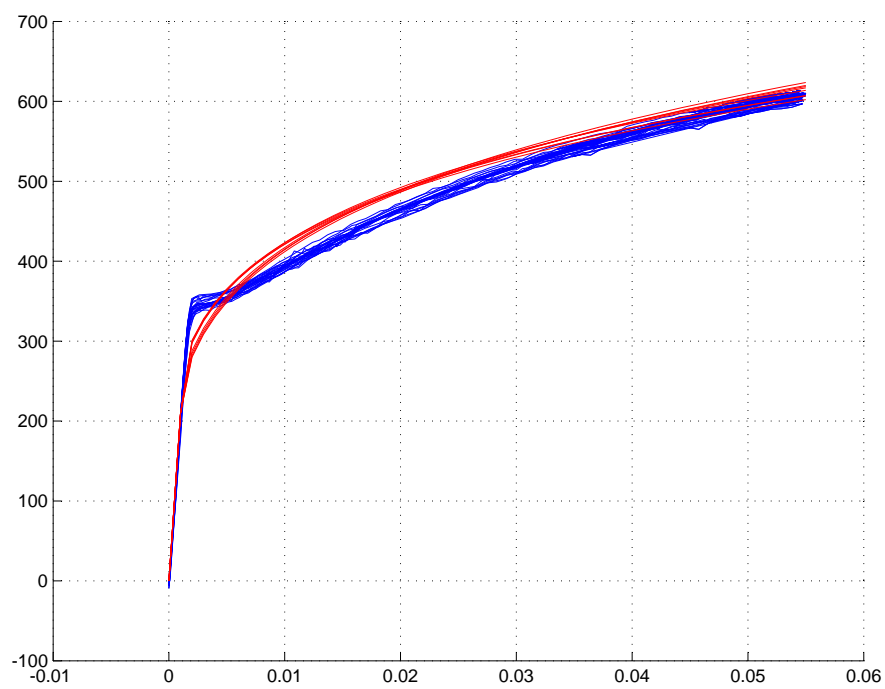


Figura 5.12: Risultati IP su H13

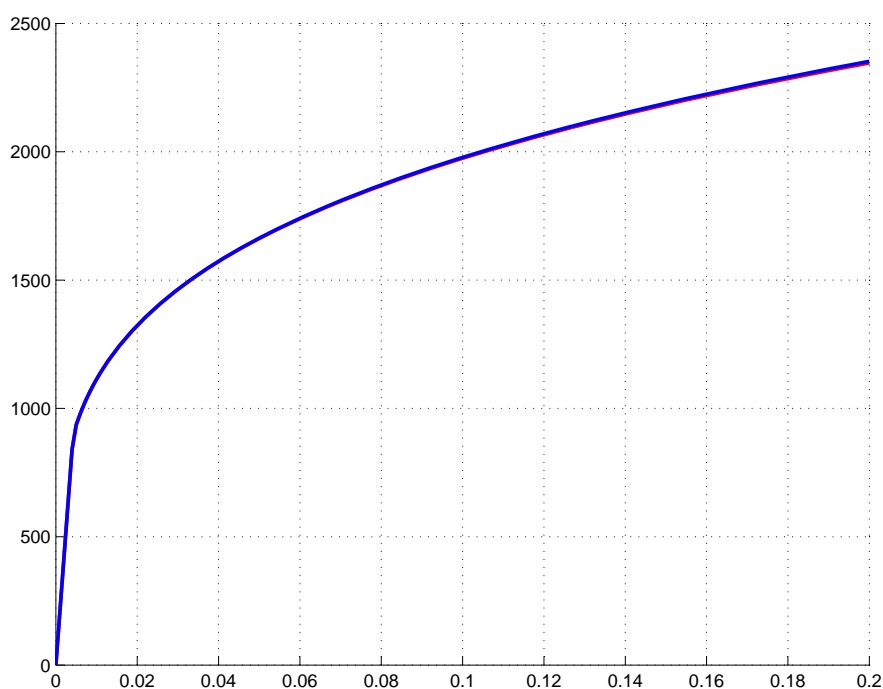


Figura 5.13: Curve di trazione reale e ricostruita nel caso di azzeramento perfetto

l'andamento, al variare di  $h_0$ , di  $\sigma_0$  e di  $n$  risultanti dall'applicazione della IP.

Quello che si evince è una fortissima sensibilità della IP rispetto al punto di azzeramento: infatti, nello spaziare di  $2 \mu m$  del punto  $h_0$ ,  $\sigma_0$  ed  $n$  subiscono una escursione di 600 MPa e 0.2 rispettivamente.

Osservando di nuovo la fig.5.7, si vede che, ad occhio, il vero punto di azzeramento è spostato a destra di almeno due o tre decimi di  $\mu m$  che, pur sembrando poca roba, sono sufficienti a fare in modo da falsare completamente il risultato della IP provocando un errore sulla determinazione di  $\sigma_0$  di un centinaio di MPa e su  $n$  di circa 0.03. Da qui si capisce come l'avere un algoritmo di azzeramento robusto ed affidabile rappresenti una condizione imprescindibile se si vuole ottenere risultati adeguati.

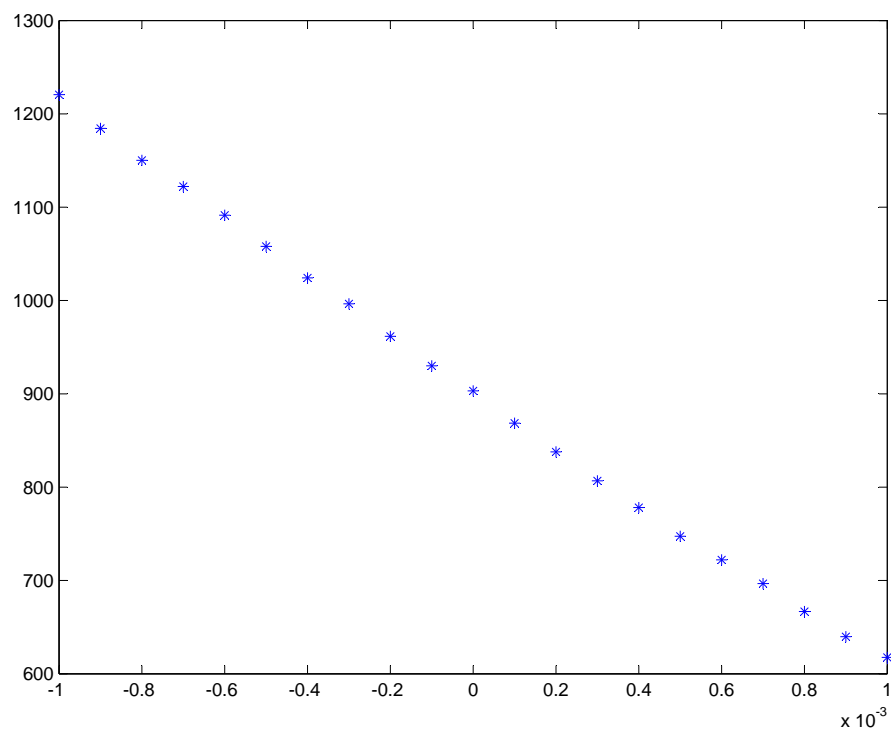


Figura 5.14: Andamento della tensione di snervamento calcolata mediante IP al variare di  $h_0$

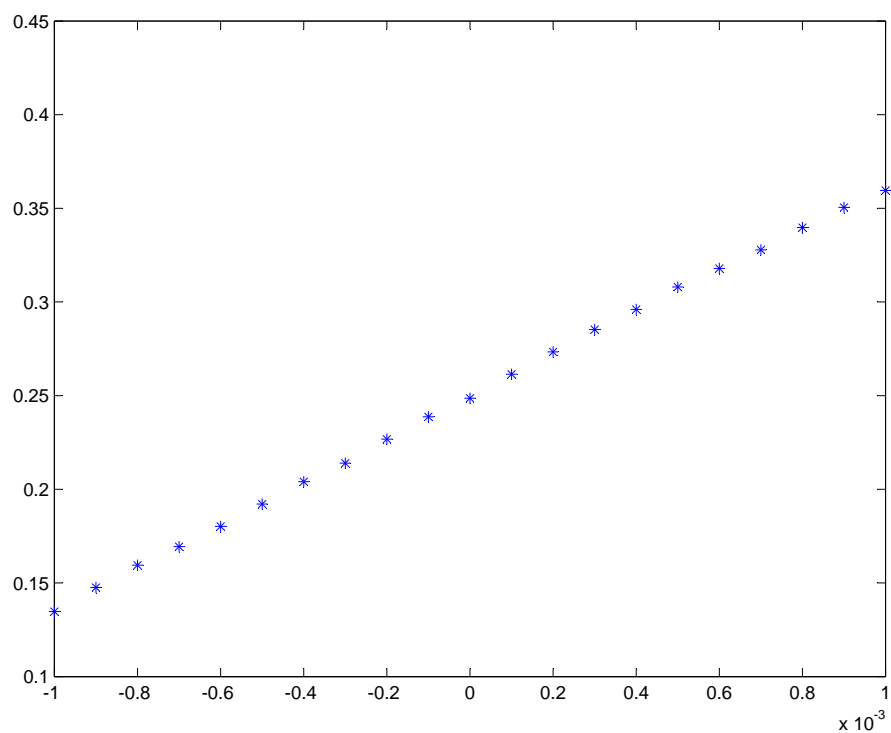


Figura 5.15: Andamento del coefficiente di incrudimento calcolato mediante IP al variare di  $h_0$

# Capitolo 6

## Analisi Progressiva

### 6.1 Introduzione

Come già accennato nel capitolo 1, l'intero algoritmo di inversione proposto presuppone come ipotesi fondamentale che il materiale esaminato risponda al modello costitutivo di Hollomon (eq.1.1). Ciò purtroppo non sempre risponde al vero. Non è difficile infatti riscontrare, soprattutto negli acciai, comportamenti anche sensibilmente dissimili da tale modello. Più in particolare si possono riscontrare i seguenti casi:

- si può osservare un classico comportamento caratterizzato da snervamento netto seguito da un plateau e da una successiva fase a comportamento incrudente (fig.6.1)

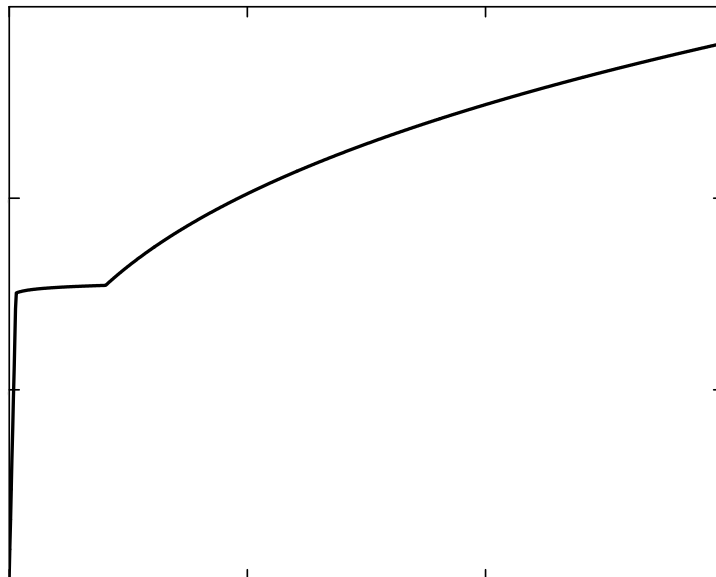


Figura 6.1: Curva  $\sigma$ - $\epsilon$  di acciaio con snervamento netto

- nell'ultimo decennio sono apparsi, soprattutto nell'industria automobilistica, materiali di nuova concezione come, ad esempio, gli acciai DP (Dual Phase) i quali, rispondendo a ben precise specifiche di stampabilità e resistenza, presentano un andamento del coefficiente di incrudimento in funzione di  $\epsilon$  fortemente variabile dall'inizio alla fine del processo deformativo (fig.6.2)

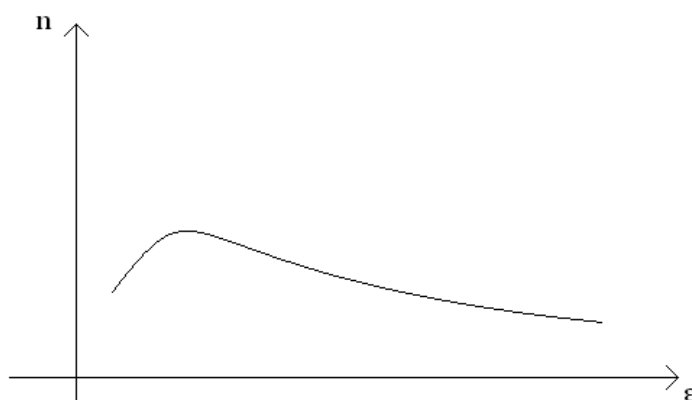


Figura 6.2: Andamento qualitativo di  $n$  per acciaio DP

Ora, se si andasse ad indentare un materiale del genere mediante il diaptometro e, successivamente, ad elaborare le curve  $L-h$  ottenute attraverso l'algoritmo illustrato nei capitoli precedenti, si andrebbe sicuramente incontro a conclusioni che poco hanno a che vedere con il reale comportamento costitutivo del materiale. Quello che si osserva infatti è che la IP restituisce in uscita una sorta di curva  $\sigma - \epsilon$  di Hollomon dei minimi quadrati: infatti, l'algoritmo di inversione va alla ricerca della curva  $L-h$  di Hollomon dei minimi quadrati rispetto alla curva sperimentale, cosicchè i valori di  $\sigma_0$  ed  $n$  risultanti sono in generale tali da descrivere l'andamento di una curva  $\sigma - \epsilon$  anch'essa, se non proprio dei minimi quadrati, molto vicina ad esserlo rispetto alla vera curva di trazione del materiale in esame. Questo fa sì che, ad esempio, nel caso di fig.6.1, si andrebbe a sottostimare in modo importante la tensione di snervamento del materiale ed a trovare un comportamento incrudente non molto fedele alla realtà (fig.6.3).

Nasce quindi l'esigenza di sviluppare un algoritmo nuovo, capace di prevedere il comportamento del materiale indentato, anche se non hollomoniano, facendo tuttavia uso del DB di curve FEM ottenute simulando materiali di Hollomon.

## 6.2 Principi di base

Il principio fondamentale su cui si basa l'analisi progressiva è il seguente:

*elaborando sequenzialmente, mediante la IP, porzioni della curva  $L-h$  sperimentale caratterizzate da differenti profondità di penetrazione massime, si otterranno in uscita coppie di valori*

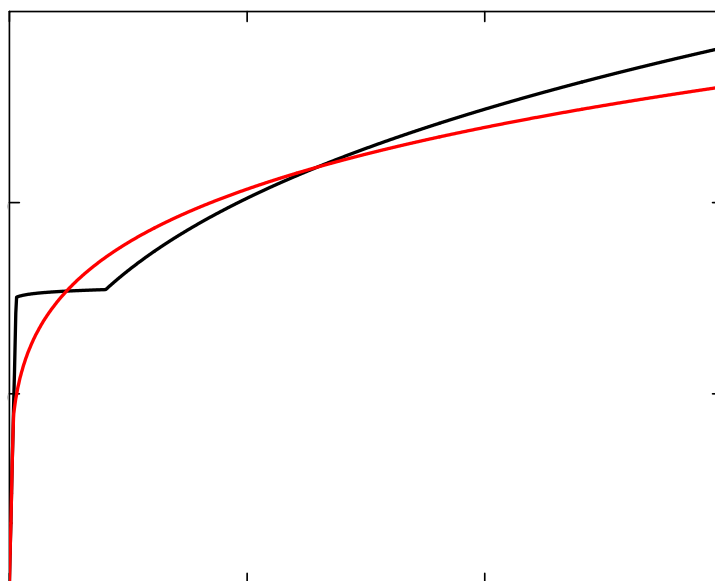


Figura 6.3: Ricostruzione operata dall'algoritmo di inversione per un acciaio non di Hollomon

$\sigma_0$ - $n$  in generale differenti. In particolare, elaborando curve  $L$ - $h$  con profondità di penetrazione massime basse (tipicamente  $\leq 10\mu\text{m}$ ) si otterrà una buona stima di  $\sigma_0$  ed una sottostima di  $n$ ; man mano poi che si estende il tratto di curva analizzato, si osserva generalmente una diminuzione della stima di  $\sigma_0$  e, per compensazione, un aumento della stima del coefficiente di incrudimento  $n$ .

In fig.6.4 è riportato un esempio di quanto affermato. La curva nera rappresenta la vera curva di trazione di un certo acciaio; fornendo tale curva in input ad una simulazione FEM del processo di indentazione, si può ricavare la curva  $L$ - $h$  del materiale. Analizzando poi mediante la IP tale curva fino a profondità di 20, 60 e 100  $\mu\text{m}$ , l'algoritmo di inversione restituisce in uscita rispettivamente la curva  $\sigma - \epsilon$  rossa, blu e verde. Si vede quindi che, coerentemente con quanto affermato poc' anzi, con la curva rossa si stima molto bene la tensione di snervamento ed in generale il comportamento costitutivo del materiale per bassi valori di  $\epsilon$  plastica, mentre con le curve blu e verde si tende sempre più verso la sottostima del valore di  $\sigma_0$  e verso l'aumento del valore di  $n$ .

Dall'osservazione di questo comportamento è nata quindi l'idea<sup>1</sup> di combinare in qualche modo le diverse curve  $\sigma - \epsilon$  relative a profondità di penetrazione crescenti, in modo da ottenere in uscita una curva non più di Hollomon, che sia, però in grado di riprodurre più accuratamente la vera curva di trazione del materiale indentato.

<sup>1</sup>L'intuizione alla base dell'analisi progressiva è dovuta al prof. Beghini, docente del DIMNP dell'Università di Pisa e relatore di questa tesi. Il metodo analitico è stata successivamente sviluppato da D.Villano in (3) e da M.Pucci in (4)

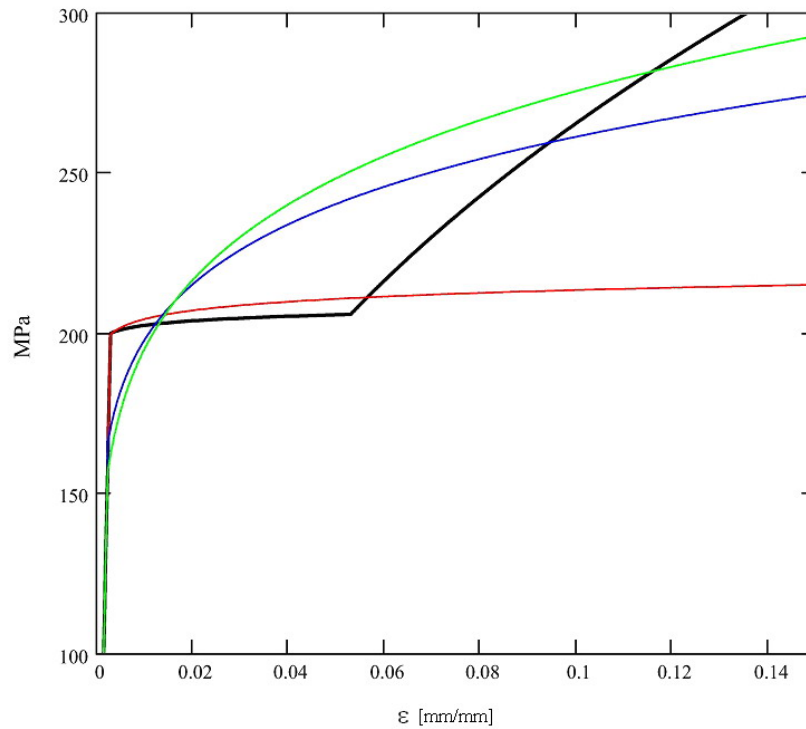


Figura 6.4: Inversione di curve  $L-h$  a differenti profondità massime di penetrazione

### 6.3 Combinazione delle curve di Hollomon

In questa sede si passa ad illustrare il metodo di combinazione delle varie curve di Hollomon ottenute analizzando mediante la IP tratti di curva  $L-h$  caratterizzati da diverse profondità di penetrazione.

Si supponga di analizzare mediante la IP la curva  $L-h$  di fig.6.5 per diversi valori di  $h_{max}$ , e di registrare, per ognuno di essi, la coppia di valori  $\sigma_0-n$  ottenuti. Si supponga inoltre, e questo è un aspetto fondamentale, di conoscere la relazione analitica che lega la  $\epsilon$  del diagramma sforzo-deformazione alla  $h$  del diagramma carico-profondità di penetrazione. Su questo aspetto si ritornerà più avanti nella trattazione, ma per il momento lo si ipotizzi noto.

In definitiva, ad ogni differente valore di  $h_{max}$  restano univocamente associate tre grandezze:

$$\begin{array}{llll}
 h_1 & \rightarrow & \sigma_0^{(1)} & n^{(1)} \quad \epsilon_1 \\
 h_2 & \rightarrow & \sigma_0^{(2)} & n^{(2)} \quad \epsilon_2 \\
 \vdots & & \vdots & \vdots \\
 h_m & \rightarrow & \sigma_0^{(m)} & n^{(m)} \quad \epsilon_m
 \end{array} \tag{6.1}$$

A questo punto, si consideri il primo tratto di curva  $L-h$ , ovvero quello compreso tra  $h = 0$  e  $h = h_1$ . Poichè, grazie alla supposizione appena fatta, esiste una corrispondenza biunivoca tra  $h$

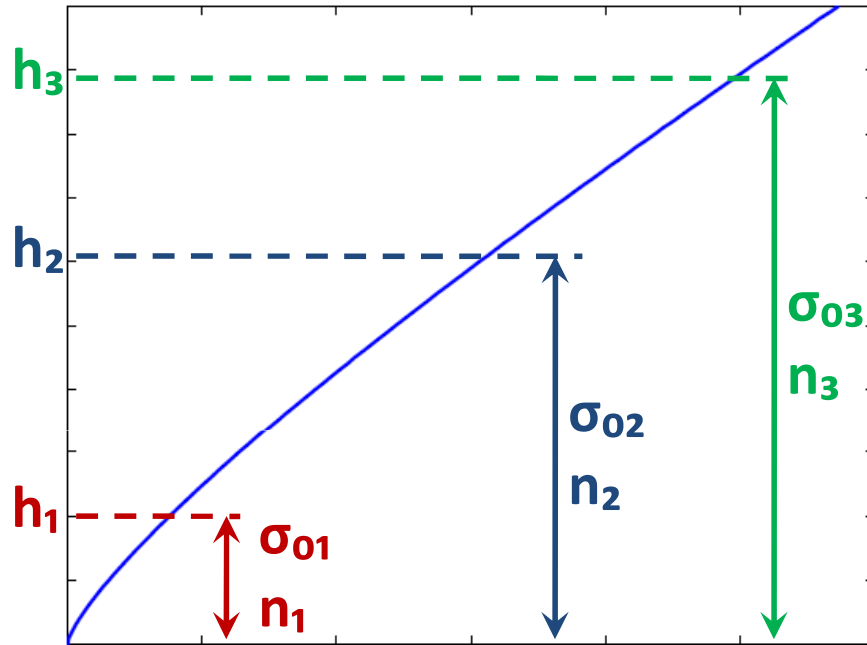


Figura 6.5: Curva L-h per acciaio non di Hollomon

ed  $\varepsilon$ , si può affermare che il tratto di curva  $0 - h_1$  sarà rappresentativo di una certa porzione  $0 - \varepsilon_1$  della curva di trazione del materiale. In particolare, si assume che tale tratto della curva di trazione sia riprodotto dalla curva di Hollomon  $\sigma_h^{(1)}(\varepsilon)^2$ .

Fino a qui, dunque, niente di nuovo. Dopodichè, si impone che nel tratto  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$  la funzione  $\sigma(\varepsilon)$  sia rappresentata da un segmento lineare di equazione:

$$\sigma^{(2)}(\varepsilon) = m_2 (\varepsilon - \varepsilon_1) + \sigma_1$$

dove

$$\sigma_1 = \sigma_h^{(1)}(\varepsilon_1)$$

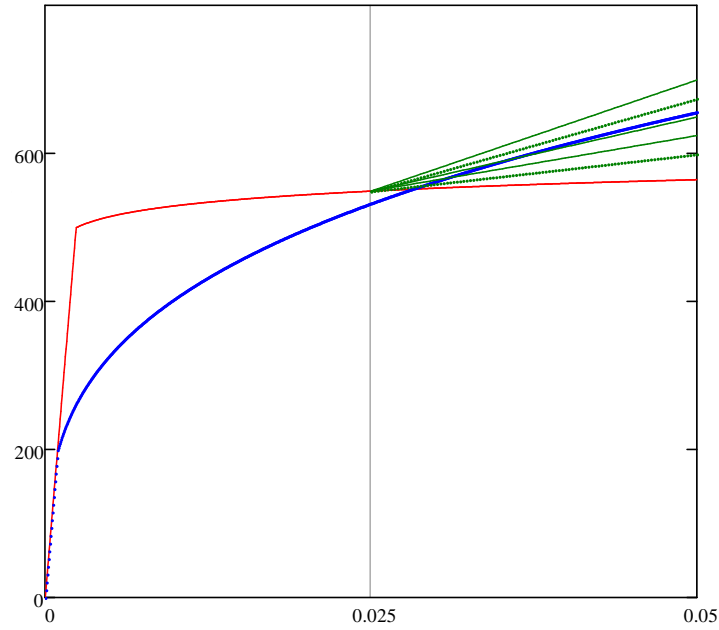
mentre  $m_2$  è tale da minimizzare la funzione:

$$\begin{aligned} \Psi_2(m_2) &= \int_0^{\varepsilon_1} [\sigma^{(1)}(\varepsilon) - \sigma_h^{(2)}(\varepsilon)]^2 d\varepsilon + \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} [\sigma^{(2)}(\varepsilon) - \sigma_h^{(2)}(\varepsilon)]^2 d\varepsilon = \\ \Psi_2(m_2) &= \int_0^{\varepsilon_1} [\sigma_h^{(1)}(\varepsilon) - \sigma_h^{(2)}(\varepsilon)]^2 d\varepsilon + \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} [m_2 (\varepsilon - \varepsilon_1) + \sigma_1 - \sigma_h^{(2)}(\varepsilon)]^2 d\varepsilon \end{aligned}$$

Per chiarire meglio il significato della funzione  $\Psi(m)$ , si consideri la fig.6.6. Si ipotizzi di

<sup>2</sup>D'ora in avanti, per semplicità di notazione, si indicherà con  $\sigma_h^{(i)}(\varepsilon)$  la curva di Hollomon individuata dai parametri  $\sigma_0^{(i)}$  ed  $n^{(i)}$ , mentre con  $\sigma^{(i)}(\varepsilon)$  si intenderà il valore della funzione  $\sigma(\varepsilon)$ , ricostruita attraverso l'analisi progressiva, nell'intervallo  $\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i$



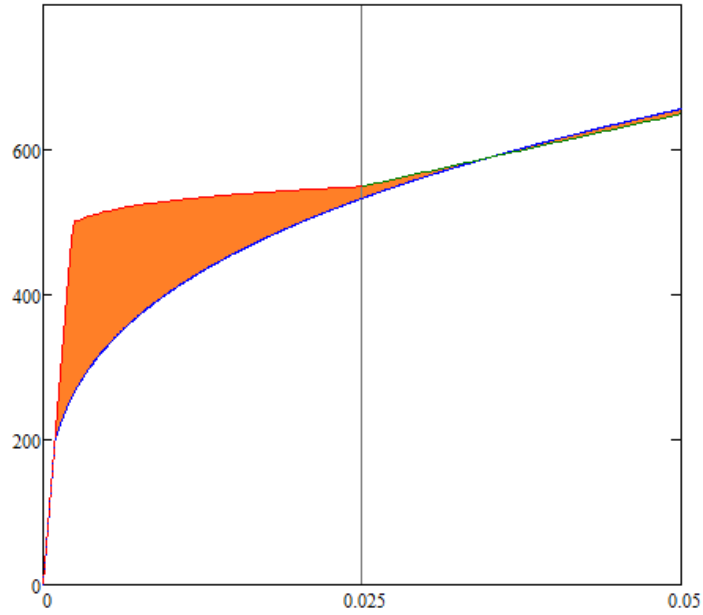
Figura 6.6: Significato pratico della funzione  $\psi(m)$ 

applicare la IP alla curva  $L-h$  di un materiale non hollomoniano per due diversi valori di  $h_{max}$ , e di ottenere il seguente risultato:

$$\begin{array}{llll}
 h & \rightarrow & \sigma_0 & n & \varepsilon \\
 h_1 & \rightarrow & 500 & 0.04 & 0.025 \\
 h_2 & \rightarrow & 200 & 0.30 & 0.050
 \end{array}$$

Le curve  $\sigma_h^{(1)}(\varepsilon)$  e  $\sigma_h^{(2)}(\varepsilon)$  sono rispettivamente rappresentate dalle curve rossa e blu di fig.6.6. Per quanto detto sopra, fino a  $\varepsilon = 0.025$  si considera valida la funzione  $\sigma_h^{(1)}(\varepsilon)$ , mentre tra  $\varepsilon = 0.025$  ed  $\varepsilon = 0.050$  la curva  $\sigma(\varepsilon)$  ricostruita avrà un andamento lineare di pendenza  $m_2$ . La funzione  $\Psi(m)$  che si vuole minimizzare non è altro che il quadrato dell'area arancione di fig.6.7. D'altra parte, la curva rossa è fissata dall'IP, perciò l'area compresa tra curva rossa e blu nel tratto  $0 - \varepsilon_1$  è una costante. Quello che invece è soggetto a minimizzazione è l'area compresa tra curva blu e retta verde nel tratto  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ , minimizzazione che avviene proprio attraverso la scelta della pendenza della retta, unico grado di libertà disponibile, avendo preventivamente imposto il passaggio per il punto  $\sigma_h^{(1)}\varepsilon(1)$ . A questo punto, proseguire oltre con l'analisi non implica alcuna difficoltà aggiuntiva. Infatti, ogni tratto  $i$ -esimo della curva  $\sigma(\varepsilon)$  successivo sarà un segmento lineare (fig.6.8) vincolato a partire dal punto:

$$\sigma_{i-1} = \sigma_h^{(1)}(\varepsilon_1) + \sum_{k=2}^{i-1} m_k (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) \quad (6.2)$$

Figura 6.7: Significato pratico della funzione  $\psi(m)$  (2)

e di pendenza  $m_i$  ricavabile risolvendo numericamente l'equazione:

$$\frac{d}{dm_i} \left\{ \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} \left[ m_i(\varepsilon - \varepsilon_{i-1}) + \sigma_{i-1} - \sigma_h^{(i)}(\varepsilon) \right]^2 d\varepsilon \right\} = 0 \quad (6.3)$$

Si noti bene come nella 6.3 compaia solo l'integrale fra  $\varepsilon_{i-1}$  ed  $\varepsilon_i$  in quanto, come detto, tutto ciò che succede a monte del segmento in esame è da considerare immutabile e l'unica variabile in gioco di volta in volta è la pendenza dell' $i$ -esimo segmento lineare.

In realtà, a livello pratico, le cose vengono realizzate in modo ancora più semplice: minimizzare la funzione  $\Psi(m)$  equivale infatti a trovare la retta dei minimi quadrati per i punti che giacciono sulla curva  $\sigma_h^{(i)}(\varepsilon)$  nell'intervallo  $\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i$ . Perciò, anzichè procedere al calcolo della funzione  $\Psi(m)$  ed alla sua successiva minimizzazione, si può pensare, in alternativa, di suddividere l'intervallo  $\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i$  in un certo numero di sottointervalli e di campionare la funzione  $\sigma_h^{(i)}(\varepsilon)$  in corrispondenza di tali punti.

Siano:

- $\underline{\varepsilon}$  il vettore dei punti estremi dei sottointervalli considerati
- $\underline{\sigma}$  il vettore le cui componenti rappresentano il valore assunto dalla funzione  $\sigma_h^{(i)}(\varepsilon)$  in corrispondenza di tali punti
- $\underline{\Sigma}$  il vettore  $\underline{\sigma} - \sigma_{i-1}$
- $\underline{E}$  il vettore  $\underline{\varepsilon} - \varepsilon_{i-1}$

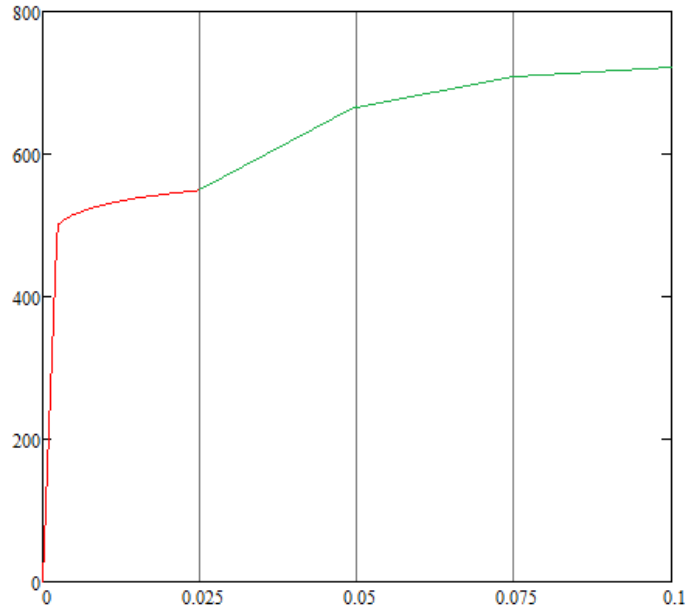


Figura 6.8: Curva  $\sigma$ - $\varepsilon$  ricostruita con l'analisi progressiva

Poichè la retta dei minimi quadrati che si sta cercando di ricavare dovrà necessariamente passare per il punto  $\sigma_{i-1}$  definito dalla 6.2, il calcolo di  $m_i$  deve essere impostato nel modo seguente:

$$m_i = (E^T \cdot E)^{-1} \cdot E^T \cdot \Sigma \quad (6.4)$$

In questo modo, l'implementazione in Matlab della routine di calcolo delle pendenze dei vari tratti lineari diventa immediata, senza che per questo ne risenta il costo computazionale. Infatti, ciò che è più gravoso sotto questo aspetto è il calcolo dei vari  $\sigma_0^{(i)} - n^{(i)}$  associati ad ogni  $h_i$ , e non certo la pseudo-inversione di un vettore contenente al più un centinaio di componenti.

## 6.4 Legame funzionale tra $\varepsilon$ ed $h$

In questa sede si procede ad analizzare il legame esistente tra  $\varepsilon$  ed  $h$ , legame del quale si è ipotizzata, ma non ancora dimostrata, l'esistenza nel paragrafo precedente e che sta alla base del metodo proposto.

Un utile punto di riferimento, se non altro qualitativo, per quello che dovrebbe essere l'andamento della funzione che lega queste due grandezze, è rappresentato dalla legge di Tabor, la quale è una legge empirica che mette in relazione il diametro del cratere finale  $d$  con la

deformazione equivalente plastica  $\varepsilon_p$  secondo la funzione (fig.6.9):

$$\varepsilon_p = 0.2 \left( \frac{d}{D} \right) \quad (6.5)$$

dove  $D$  è il diametro della sfera indentatrice. La validità di questa legge è limitata alla fase

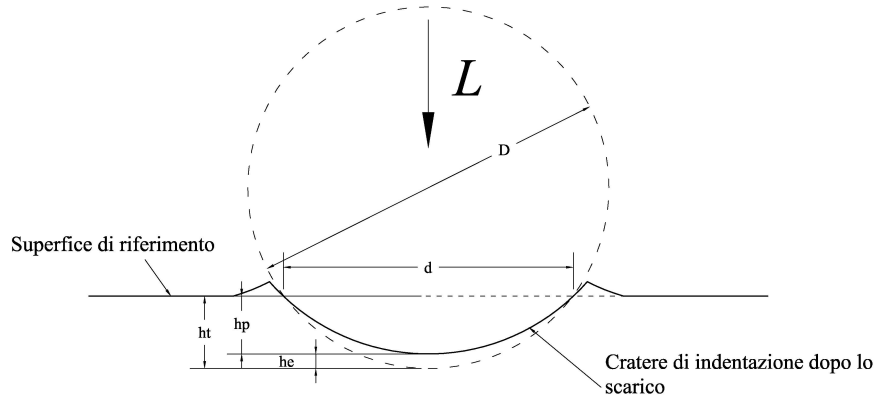


Figura 6.9: Cratere di indentazione

completamente plastica dell'indentazione.

Per far comparire  $h$  in questa relazione, si ipotizza che il cratere finale abbia la forma di una calotta sferica di diametro  $D$  e che il ritorno elastico del materiale indentato sia trascurabile rispetto alla deformazione plastica. Sotto queste ipotesi è possibile asserire che:

$$d = 2\sqrt{h(D-h)} \approx 2\sqrt{hD} \quad (6.6)$$

che, sostituita nella 6.5, fornisce il risultato:

$$\varepsilon_p = 0.4\sqrt{\frac{h}{D}} \quad (6.7)$$

Se si assume la trascurabilità della deformazione elastica rispetto a quella totale, si può sostituire  $\varepsilon$  ad  $\varepsilon_p$  nella 6.7, ottenendo così la relazione cercata.

Ovviamente, questa relazione va presa per quello che è, ossia un'indicazione qualitativa del tipo di legame esistente tra  $\varepsilon$  ed  $h$ , tuttavia riesce a mettere in luce un aspetto importante, e cioè il fatto che  $\varepsilon$  aumenta in modo meno che proporzionale rispetto ad  $h$ .

Per cercare di ottenere indicazioni più precise circa il vero legame funzionale esistente, si consideri la fig.6.10 in cui è raffigurato, mediante curve di livello, l'andamento della deformazione plastica equivalente nel materiale indentato per un certo livello di profondità di penetrazione ( $h = 0.008 \cdot D$ ).

Si ipotizzi di valutare il valore di  $\varepsilon_p$  solamente sull'asse di simmetria lungo la direzione di

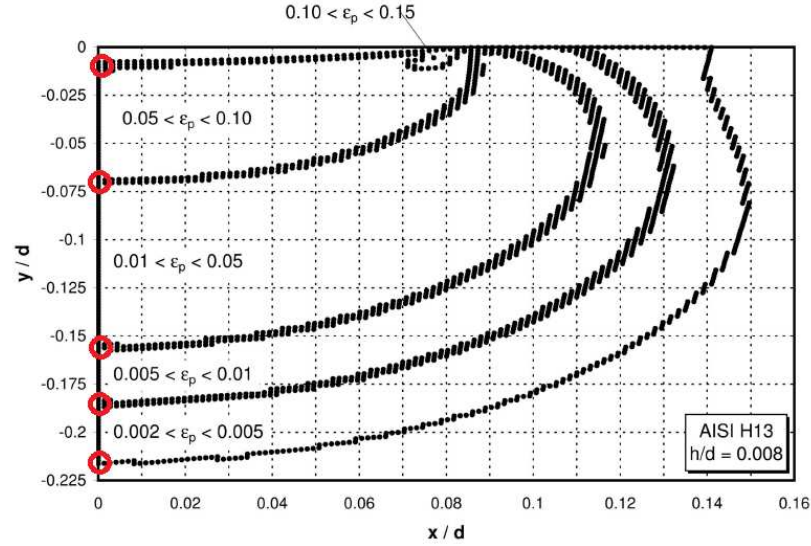


Figura 6.10: Andamento per curve di livello della funzione  $\varepsilon^{(pl)}(x/d, y/d)$

indentazione. Le intersezioni delle curve di livello con tali assi forniscono dei punti in cui si conosce il valore esatto della deformazione plastica equivalente. Si procede allora a costruire per punti l'andamento di  $\varepsilon_p$  in funzione di  $y/D$ , andamento riportato in fig.6.11.

Questa funzione possiede due proprietà importanti:

1. per  $y = 0$  deve assumere valore finito pari a  $\varepsilon_p$  che si riscontra nel materiale a contatto con la sfera
2. per  $y \rightarrow \infty$  deve tendere a zero

Per interpolare una funzione del genere è dunque necessario utilizzare una struttura analitica che possieda essa stessa queste proprietà. Una possibile scelta è rappresentata dalla seguente relazione:

$$\varepsilon_p(y) = e^{f(y)}$$

dove

$$f(y) = \sum_{k=1}^m a_k \cdot \left(\frac{y}{D}\right)^{r_k} \quad (6.8)$$

Per valutare i coefficienti  $a_k$  della 6.8 basta applicare il Normal Equation Method sui punti rossi di fig.6.11 riportati in scala semilogaritmica: infatti, in tal caso, si può porre:

$$\log(\varepsilon_p) = \sum_{k=1}^m a_k \cdot \left(\frac{y}{D}\right)^{r_k} \quad (6.9)$$

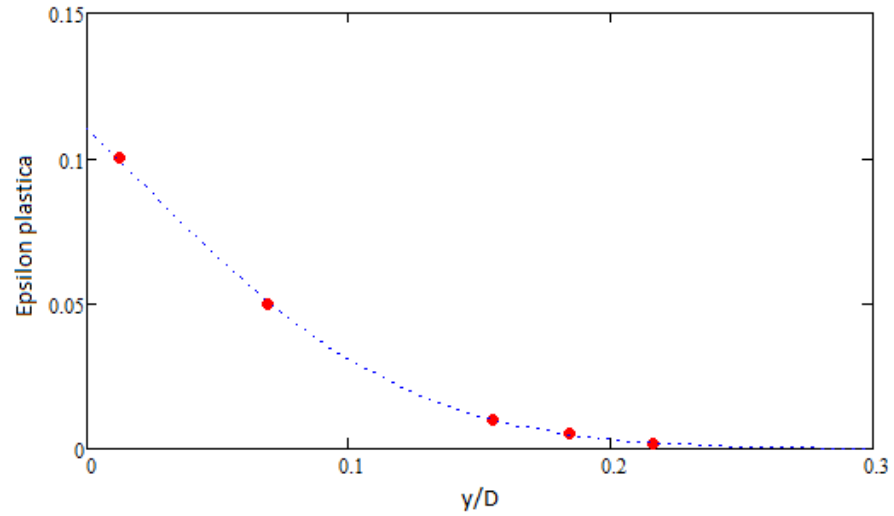


Figura 6.11: Andamento della funzione  $\varepsilon^{(pl)}(y/d)$

e quindi l'applicazione del N.E.M. diventa immediata. Il risultato di questa operazione riportato poi in scala naturale è rappresentato dalla curva blu tratteggiata di fig.6.11.

Il problema, però, è che ciò di cui si necessita è associare un valore *scalare* di  $\varepsilon_p$  ad ogni valore di  $h$ , e non una funzione. Si calcola allora la media integrale della funzione  $\varepsilon_p(y)$  nel seguente modo:

- si valuta numericamente, attraverso l'espressione della funzione interpolante appena ricavata, il valore  $\tilde{y}$  in corrispondenza del quale  $\varepsilon_p$  è pari a 0.001
- si calcola, sempre numericamente, la media integrale  $\bar{\varepsilon}_p$  con la formula

$$\bar{\varepsilon}_p = \frac{1}{\tilde{y}} \int_0^{\tilde{y}} \varepsilon_p(y) dy$$

In questo modo, ad ogni valore di  $h$  resta associato un valore numerico  $\bar{\varepsilon}_p$  che rappresenta, in un certo senso, la deformazione plastica equivalente media che si riscontra nel materiale per quella determinata profondità di penetrazione.

Di mappe di deformazione plastica se ne possiede un certo numero: in particolare sono disponibili per  $h/D$  pari a 0.004, 0.008, 0.012, 0.020, 0.032 e 0.040. Calcolando  $\bar{\varepsilon}_p$  per ognuno di questi valori di  $h/D$ , si può ricostruire, per punti, l'andamento della funzione  $\bar{\varepsilon}_p(h)$ , riportato in fig.6.12 a confronto con la legge di Tabor (curva arancio) e con la curva dei minimi quadrati ottenuta sostituendo 0.366 a 0.4 nell'espressione della legge di Tabor.

Tutto questo sviluppo aveva lo scopo di confutare o confermare la legge di Tabor ottenuta con tutta una serie di approssimazioni ed il risultato è che effettivamente le cose funzionano abbastanza. Per quanto riguarda i coefficienti numerici, bisogna prenderli un pò con le molle,

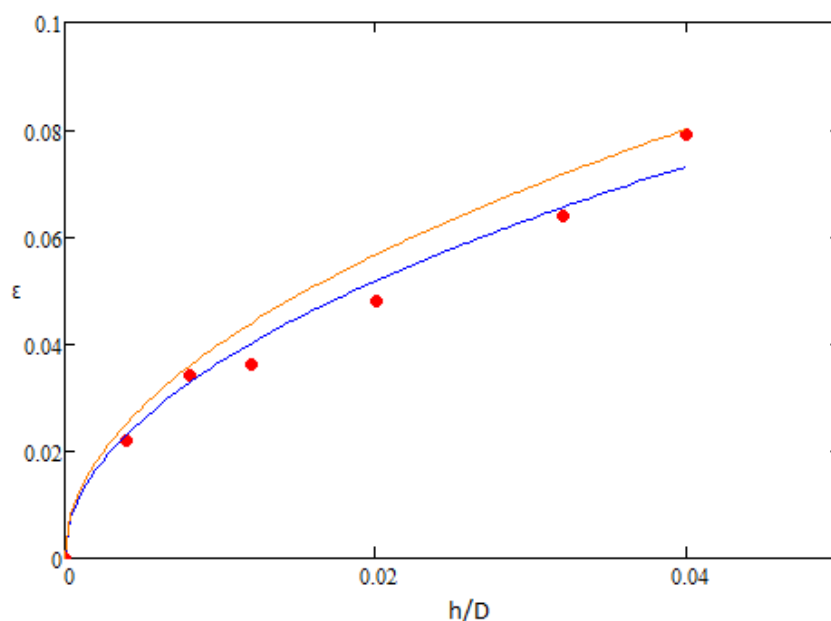


Figura 6.12: Andamento della funzione  $\varepsilon^{(pl)}(h/D)$

in quanto i valori ottimali potranno solo essere determinati in sede di applicazione dell'analisi progressiva laddove si cercherà la massima corrispondenza possibile tra curve  $\sigma(\varepsilon)$  vere e ricostruite agendo tra le altre cose, proprio sui valori numerici dei coefficienti della funzione  $\varepsilon_p(h)$ . Inoltre, specialmente nelle fasi iniziali della deformazione, la supposta trascurabilità della deformazione elastica lascia un pò il tempo che trova. Per cui, si ribadisce ancora una volta che, in questa sede, l'intento era soprattutto di mettere in luce in modo più che altro qualitativo il tipo di legame funzionale esistente tra deformazione e profondità di indentazione.

## 6.5 Applicazioni dell'analisi progressiva

Si passa ora ad applicare la tecnica introdotta in questo capitolo su dei materiali non di hollomon il cui comportamento ad indentazione è stato riprodotto mediante simulazioni FEM. Questo si rende necessario in fase di messa a punto della tecnica in quanto si evita la presenza di tutta una serie di problemi, tra cui l'azzeramento e la calibrazione, in modo da ridurre al minimo le variabili in gioco, così da potersi concentrare solamente sui problemi connessi con l'utilizzo dell'analisi progressiva stessa.

Ci si concentrerà inizialmente sulle leghe ferrose e si prenderanno a riferimento quattro diversi materiali le cui curve di trazione vere sono riportate in fig.6.13. Questi materiali sono identificati

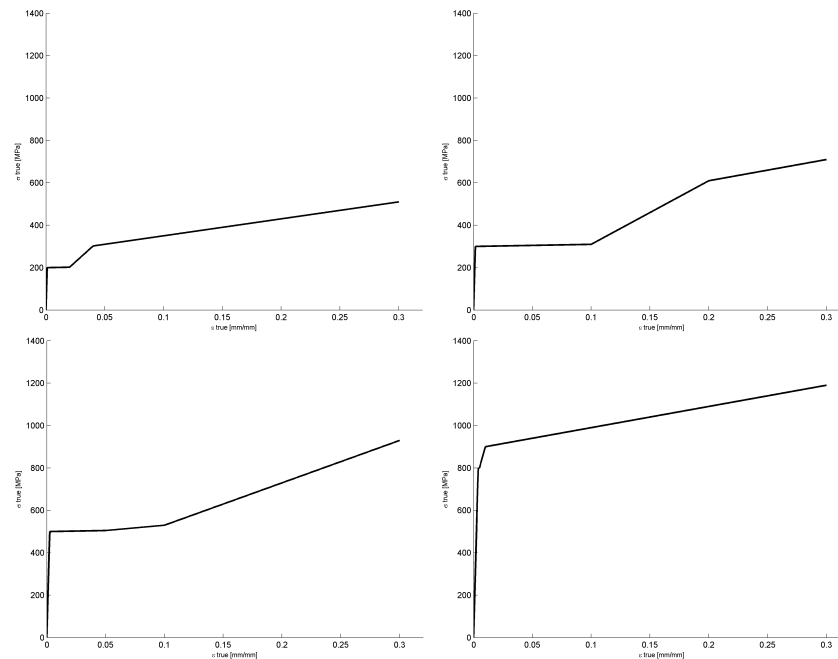


Figura 6.13: Curve  $\sigma$ - $\epsilon$  di materiali non di Hollomon simulati

attraverso un codice<sup>3</sup> che ne specifica:

- il modulo elastico (per esempio,  $Fe-4=210$  GPa,  $Al-4=70$  GPa)
- la tensione di snervamento in MPa
- le pendenze dei tre tratti lineari successivi allo snervamento, sempre in MPa
- la  $\epsilon$  che segna il passaggio tra il primo ed il secondo tratto lineare (il passaggio tra il secondo ed il terzo tratto avviene a deformazione doppia rispetto a questa)

Nel nostro caso, i codici dei quattro materiali di fig.6.13 sono rispettivamente:

- Fe-4\_200\_100\_5000\_800\_002
- Fe-4\_300\_100\_3000\_1000\_010
- Fe-4\_500\_100\_500\_2000\_005
- Fe-4\_800\_100\_20000\_1000\_0005

Per semplicità di notazione, i quattro materiali citati saranno rispettivamente indicati con le sigle abbreviate Fe200, Fe300, Fe500 ed Fe800 d'ora in avanti.

<sup>3</sup>Per maggiori dettagli si veda (4)



Si prenda per il momento in considerazione il materiale Fe300 e si applichi la IP alla sua curva  $L-h$  tagliandola, di volta in volta, a valori di  $h$  differenti, in un range compreso tra 5 e 100  $\mu m$ . I valori di  $\sigma_0$  ed  $n$  ottenuti al variare di  $h$  sono riportati in fig.6.14 e 6.15.

Le due cose che saltano subito all'occhio sono i trend decrescente per  $\sigma_0$  e crescente per

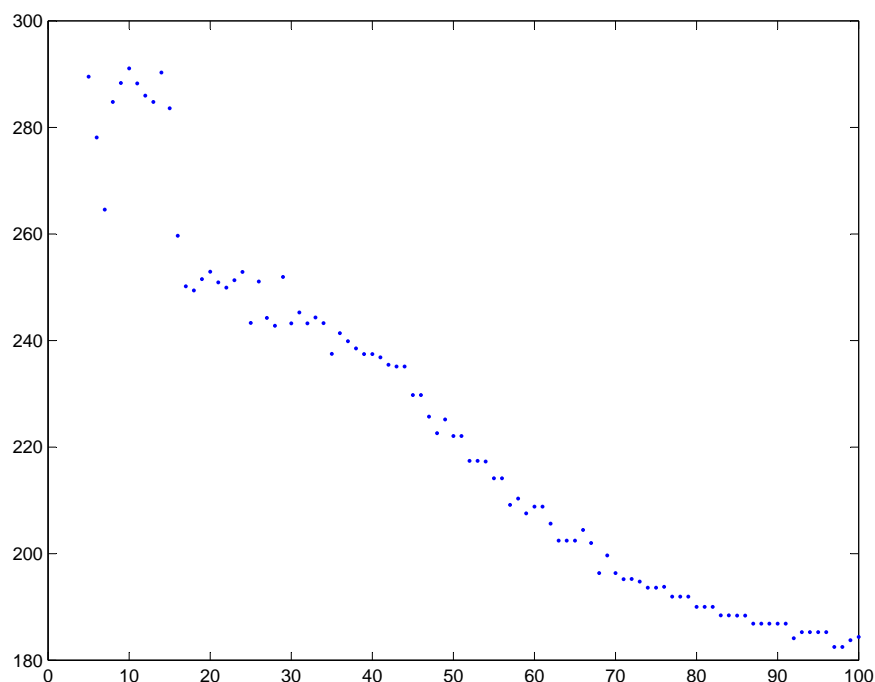


Figura 6.14: Fe300. Valori di  $\sigma_0$  calcolati con IP al variare di  $h$  di taglio

$n$ , ma soprattutto la forte dispersione dei risultati. Ciò rende molto pericolosa l'applicazione della analisi progressiva in quanto, a valori molto simili del taglio  $h_{max}$  possono corrispondere curve di Hollomon fortemente differenti, rendendo di fatto scarsamente ripetibile il risultato finale dell'analisi.

Un modo per attenuare parzialmente questo fenomeno è, ad esempio, il ricampionamento dei risultati: si applica cioè un filtro consistente nell'interpolare secondo i minimi quadrati con una funzione semplice, tipicamente una retta, un certo numero di dati consecutivi, e di associare all'ascissa media di questi dati, l'ordinata indicata dal valore della funzione interpolante. Dopodichè, si passa al gruppo di dati successivo, fino ad arrivare in fondo.

Il risultato che si ottiene con questa procedura è riportato in fig.6.16 e 6.17. Si noti che il trend non è stato in alcun modo alterato, mentre la dispersione è stata fortemente ridotta.

Grazie a questo artificio, si riescono a mettere meglio in evidenza certe peculiarità di questi andamenti che saranno molto utili per mettere a punto la tecnica.

Per prima cosa, si noti che, fino ad un certo valore di  $h$ ,  $\sigma_0$  ed  $n$  trovati dalla IP si mantengono ad un livello pressochè costante. Ciò significa che, fino a quel valore di  $h$ , la curva  $L-h$  del materiale

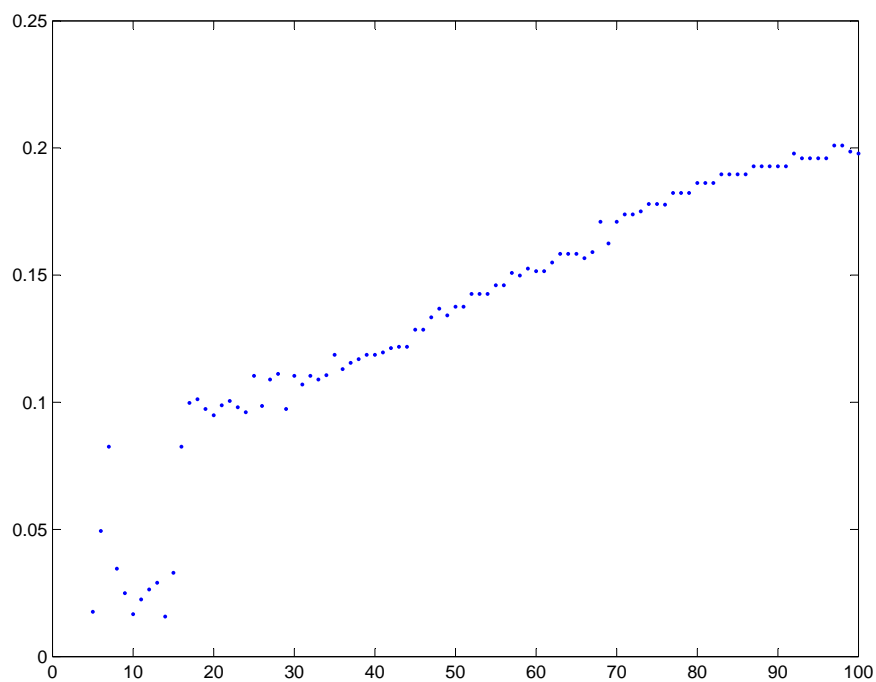


Figura 6.15: Fe300. Valori di  $n$  calcolati con IP al variare di  $h$  di taglio

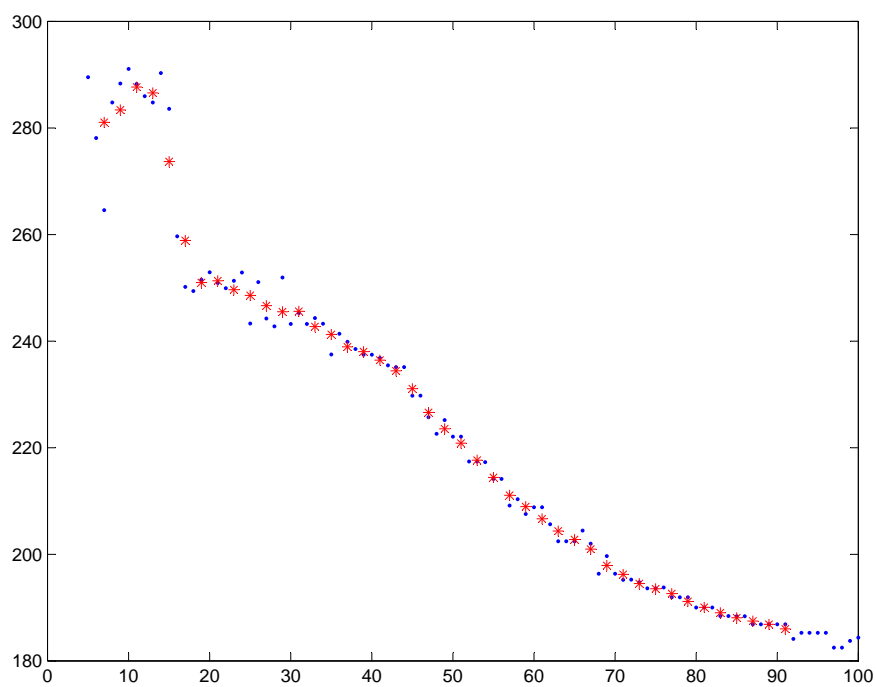


Figura 6.16: Fe300. Valori di  $\sigma_0$  calcolati con IP e ricampionati al variare di  $h$  di taglio

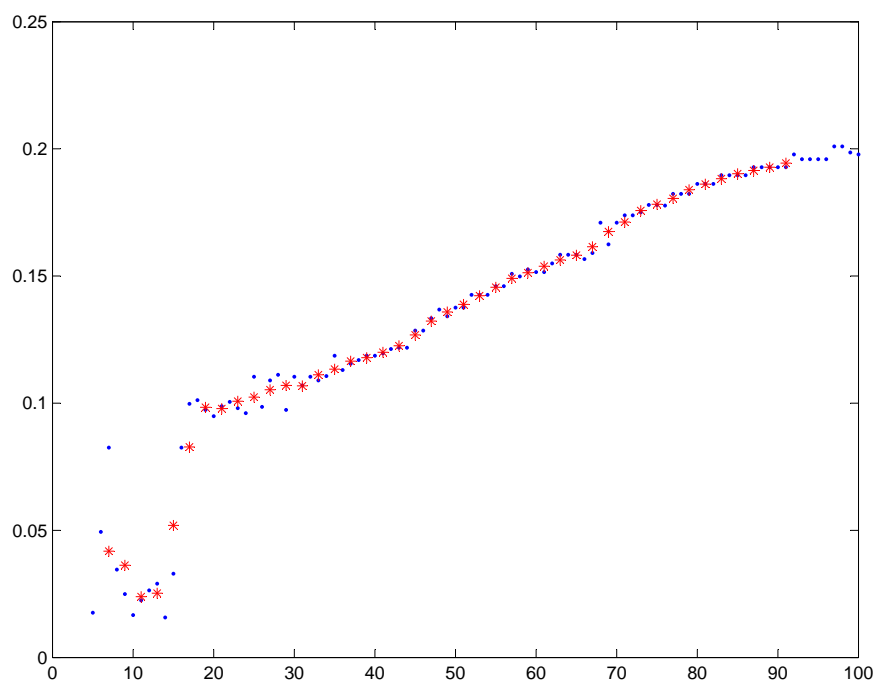


Figura 6.17: Fe300. Valori di  $n$  calcolati con IP e ricampionati al variare di  $h$  di taglio

è quella tipica di un materiale di Hollomon. Avendo a disposizione la curva di trazione, si vede che il materiale ha un comportamento circa hollomoniano fino ad un valore di  $\varepsilon$  pari a 0.1. Si può pensare allora di mettere in relazione questo valore di  $\varepsilon$  con il valore di  $h$  oltre il quale la IP comincia a fornire come risultato una curva di Hollomon sensibilmente differente da questa, ovvero circa 13-14  $\mu m$ .

Anche il materiale Fe500 presenta un comportamento simile della curva di trazione, nel senso che si mantiene circa hollomoniano fino a  $\varepsilon = 0.1$  per poi deviare bruscamente da tale andamento. Ebbene, nonostante un valore di tensione di snervamento quasi doppio rispetto al caso precedente, anche in questo caso l'analisi dei risultati ottenuti dalla IP mostra un comportamento circa costante fino ad  $h$  pari a 14  $\mu m$ , per poi iniziare a calare sensibilmente nel caso di  $\sigma_0$  (fig.6.18), e ad aumentare nel caso invece di  $n$ .

Pertanto, si può affermare che nel legame funzionale tra  $h$  ed  $\varepsilon$ , i valori 14  $\mu m$  e 0.1 dovranno essere in corrispondenza. Tornando all'acciaio Fe300, si procede ora a cercare un secondo punto della curva  $\varepsilon(h)$  attraverso la ricerca del valore della pendenza del primo tratto lineare successivo alla curva di Hollomon che meglio si adatta all'effettivo andamento della curva di trazione.

Al riguardo, si è notato che si ottiene un'ottima corrispondenza tra curva di trazione reale e ricostruita se ad  $\varepsilon = 0.2$  si fa corrispondere  $h = 85 \mu m$  (fig.6.19).

Come in precedenza poi, anche l'acciaio Fe500 risponde positivamente a questa supposizione.

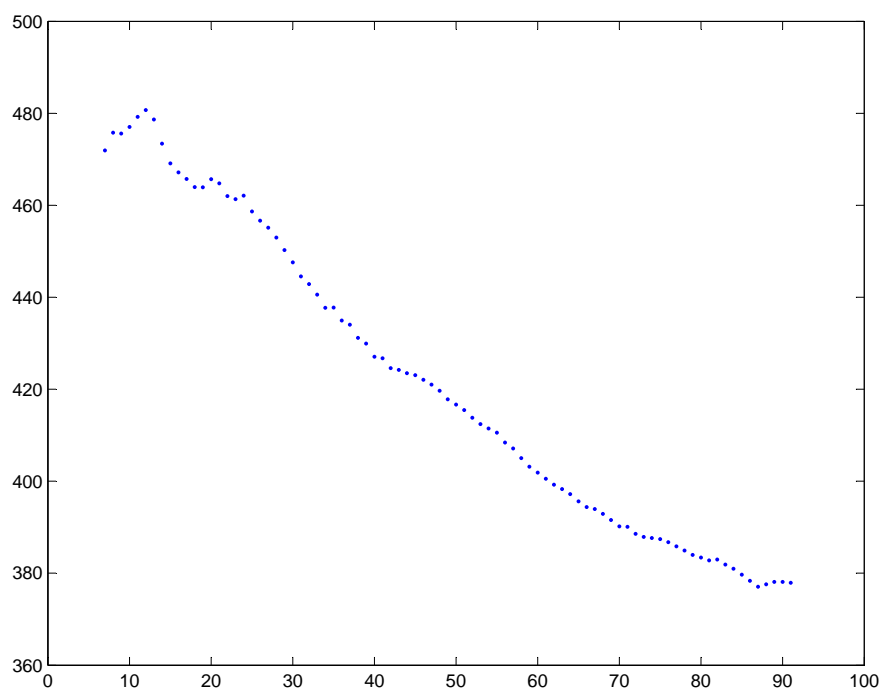


Figura 6.18: Fe500. Valori di  $\sigma_0$  calcolati con IP e ricampionati al variare di  $h$  di taglio

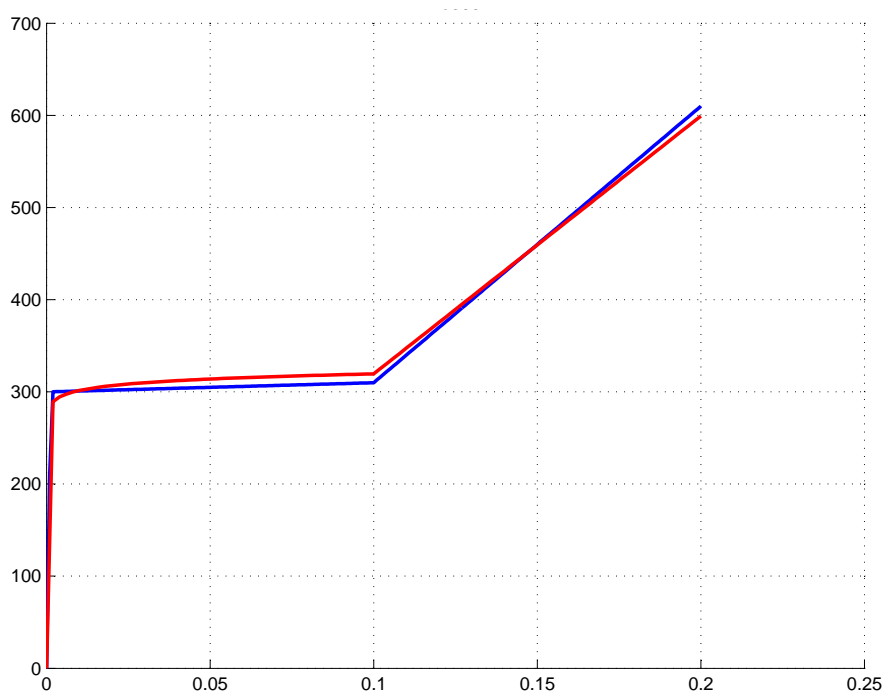


Figura 6.19: Fe300. Ricostruzione mediante Analisi Progressiva

Infatti, avendo come unica accortezza di applicare tre tagli (13, 50 e 85  $\mu m$ ) anzichè solo due, si ottiene il risultato riportato in fig.6.20, risultato di eccellente valore.

Determinati questi due punti della funzione  $\varepsilon(h)$ , si può affermare che:

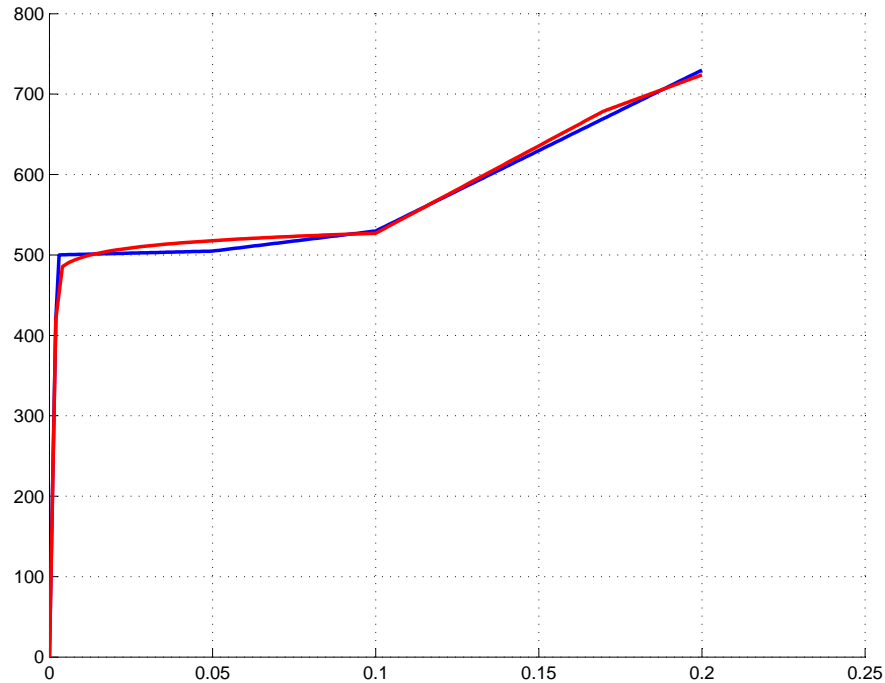


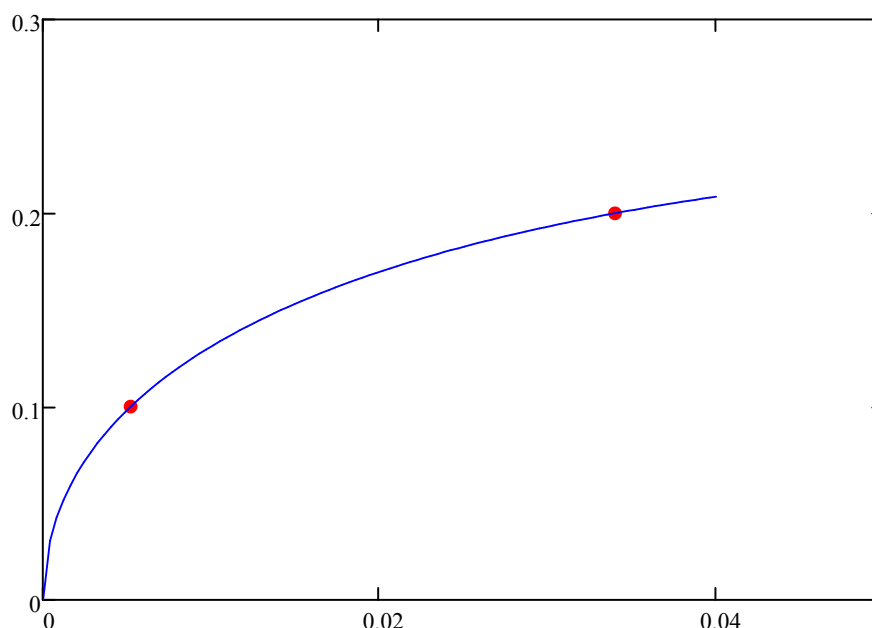
Figura 6.20: Fe500. Ricostruzione mediante Analisi Progressiva

1. rispetto ai valori calcolati al paragrafo precedente mediante la legge di Tabor, a parità di  $h$  si registrano valori di  $\varepsilon$  decisamente superiori, anche se, tuttavia, almeno qualitativamente, l'andamento che si osserva è quello inizialmente previsto
2. per la buona riuscita dell'analisi progressiva è assolutamente necessario che i due punti fissati vengano riprodotti molto accuratamente dalla funzione analitica, cosa che, con una relazione del tipo 6.7, non si verifica. E' necessario allora optare per una forma leggermente più complessa della funzione  $\varepsilon(h)$ , ad esempio del tipo

$$\varepsilon = a_1 \cdot \left(\frac{h}{D}\right)^{0.5} + a_2 \cdot \left(\frac{h}{D}\right) \quad (6.10)$$

In questo modo, con l'ulteriore grado di libertà, la funzione è in grado di passare perfettamente per i due punti determinati in precedenza (fig.6.21).

Si applica ora l'analisi progressiva con questa curva  $\varepsilon(h)$  all'acciaio Fe800. Questo in realtà non è un test molto probante per l'analisi in quanto il materiale in questione è praticamente un

Figura 6.21: Funzione  $\varepsilon(h)$  più conveniente

materiale di Hollomon e come tale, facilmente riproducibile già con la semplice applicazione della IP. Ad ogni modo, il risultato ottenuto è buono, ed è riportato in fig.6.22.

Meno bene, invece, vanno le cose per quanto riguarda l'acciaio Fe200: infatti, in questo caso, la curva di trazione comincia a scostarsi dall'andamento hollomoniano prima che la IP possa accorgersene, a causa della scarsa risoluzione del database FEM in vicinanza dell'origine. Si noti comunque come (fig.6.23) l'algoritmo riesca a seguire, almeno approssimativamente, l'andamento della curva di trazione vera del materiale.

## 6.6 Scelta del vettore $H$

Uno dei punti cruciali per la buona riuscita dell'analisi progressiva è la scelta del vettore  $\mathbf{H}$ , ossia dell'insieme di valori  $h$  a cui effettuare il taglio della curva sperimentale. Infatti, non si può pensare di andare a caso, o di effettuare un grande numero di tagli perchè il risultato che se ne otterrebbe è assolutamente scarso.

In realtà, non tutte le situazioni sono ugualmente critiche: innanzi tutto, fino a che il materiale ha un comportamento hollomoniano, è possibile (anche se inutile) effettuare quanti tagli si desidera, ed il risultato sarà sempre ottimo (a causa del fatto che il database è costruito su curve di Hollomon). Particolarmente importante, invece, per la buona riuscita dell'analisi, è centrare abbastanza precisamente il valore  $h$  in corrispondenza del quale il materiale inizia a divergere dal modello hollomoniano, soprattutto se tale deviazione è molto brusca, come nel

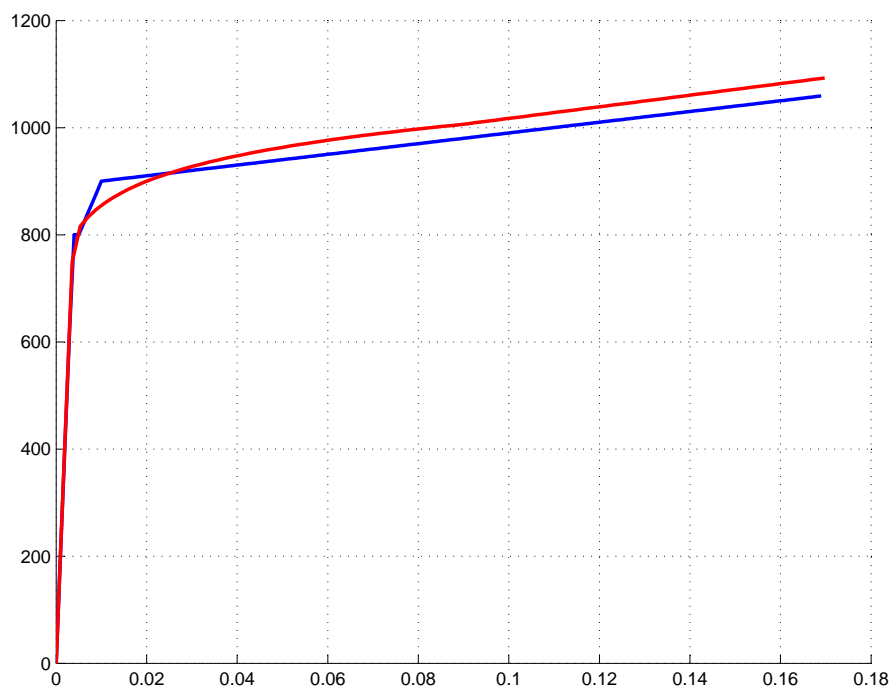


Figura 6.22: Fe800. Ricostruzione mediante Analisi Progressiva

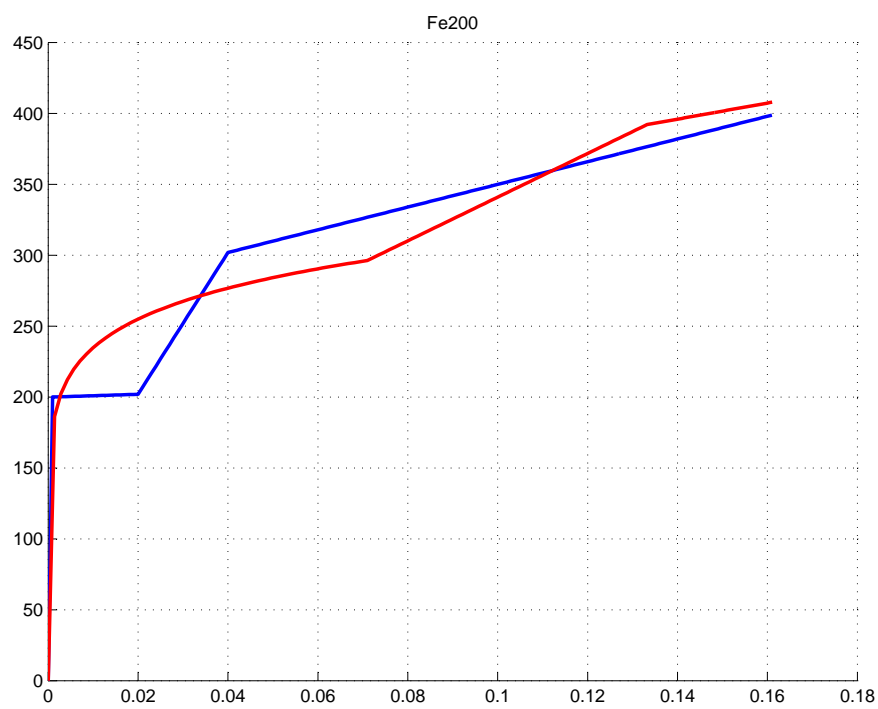


Figura 6.23: Fe200, Ricostruzione mediante Analisi Progressiva

caso di materiali che presentano uno snervamento con plateau. Infatti, in tal caso (fig.6.24), se si prendono due valori di  $h$  corrispondenti ad  $\varepsilon$  che si trovino a cavallo del punto di deviazione, il risultato ottenuto presenta una qualità abbastanza scadente, come visibile in figura dove, anzichè utilizzare  $\mathbf{H} = [13, 85]$ , si è utilizzato  $\mathbf{H} = [9, 85]$ .

Tutti questi discorsi hanno un senso, ma non bisogna dimenticare che la vera curva di trazione

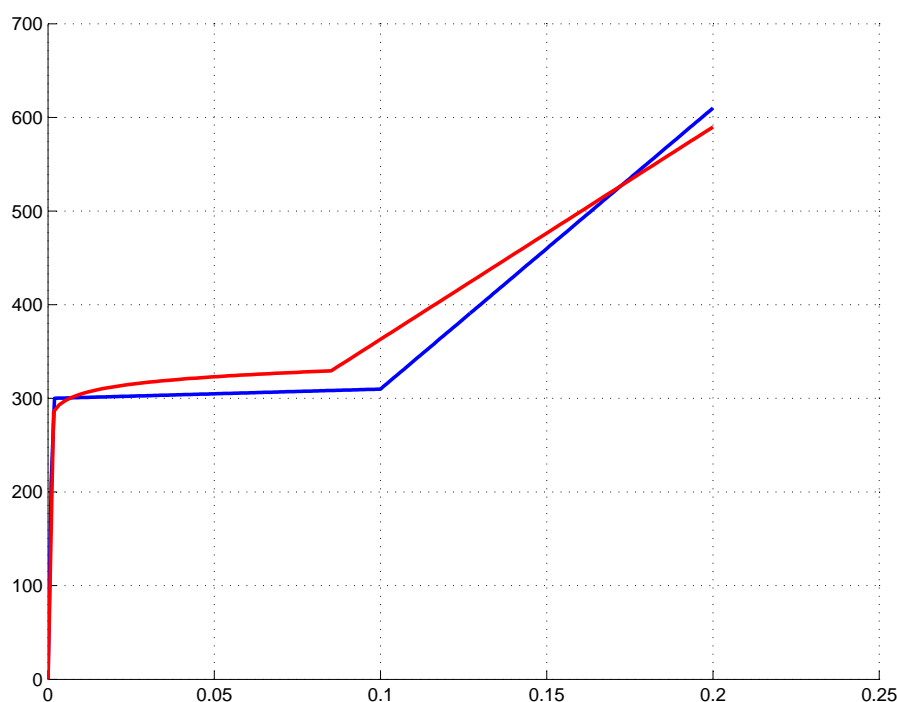


Figura 6.24: Fe300. Ricostruzione mediante Analisi Progressiva con vettore  $H$  non ottimale

del materiale è incognita, e così pure l'eventuale punto di deviazione del materiale dal modello di Hollomon. L'unico dato su cui si può ragionare è la curva  $L-h$ , ed è dunque questa che si deve interrogare per ottenere le informazioni di cui si necessita.

Se si ricorda, però, nel paragrafo precedente si era visto che l'andamento dei risultati della IP al variare di  $h$  cominciava a cambiare sensibilmente proprio in corrispondenza di  $h = 13\mu m$  e, proprio per questo, si è deciso di associare questo valore di  $h$  ad  $\varepsilon = 0.1$ . Adesso, però, la funzione  $\varepsilon(h)$  deve essere considerata un dato di partenza e non più un qualcosa da determinare, per cui si può ragionare all'inverso, cioè: si osserva che oltre  $h = 13\mu m$  la IP inizia ad assumere un trend non più costante, si valuta tramite la 6.10 che tale valore corrisponde ad  $\varepsilon = 0.1$  e si conclude che fino a questo valore di  $\varepsilon$  la curva di trazione del materiale ha un andamento hollomoniano con  $\sigma_0$  circa uguale a 300 MPa ed  $n$  circa uguale a 0.01. Laddove invece si notasse che, per ogni valore di  $h$ , i parametri  $\sigma_0$  ed  $n$  forniti dalla IP tendono ad oscillare attorno ad un valore circa costante, la conclusione dovrebbe essere che la curva di trazione del materiale risponde effettivamente al modello di Hollomon, per cui diventa sufficiente il risultato fornito



dalla IP e non è più necessario applicare l'analisi progressiva.

Il problema vero è la determinazione dei valori di  $h$  di taglio successivi al primo. Infatti, l'andamento delle curve di fig.6.16 e 6.17 non forniscono ulteriori indicazioni utili per la scelta del vettore  $H$ , nè purtroppo i confronti effettuati tra curve sperimentali e teoriche ricostruite hanno mostrato risultati confortanti. Al momento non resta altro da fare che lasciare aperta questa questione, con la certezza tuttavia che, una volta risolta, l'analisi progressiva è potenzialmente in grado di fornire risultati di sicuro valore ingegneristico.

## 6.7 Problemi e possibili sviluppi futuri

Nel paragrafo precedente è stata ricavata una certa funzione  $\varepsilon(h)$  che si è dimostrata la più conveniente di tutte per riprodurre il comportamento delle curve esaminate. Tuttavia, la certezza della veridicità della 6.10 è tutt'altro che garantita. Infatti, sono stati trovati solamente due punti (tre, se si aggiunge l'origine degli assi) attraverso i quali è stata fatta passare una funzione perfettamente interpolante.

E' anche vero che, però, l'andamento qualitativo trovato corrisponde a quello previsto mediante la legge di Tabor e mediante l'analisi delle mappe di deformazione plastica equivalente svolta in precedenza. Quindi, al di là del preciso valore dei coefficienti numerici della 6.10, non c'è da aspettarsi qualcosa di radicalmente differente da quanto proposto.

Un problema piuttosto importante che viene messo in luce da tale andamento è il fatto che, ad esempio, ad  $\varepsilon = 0.05$  corrisponderebbe  $h = 2.8\mu m$  ed andando ancora più indietro con  $\varepsilon$ , il valore di  $h$  corrispondente tende a scendere molto repentinamente. Ciò significa che il database di curve FEM, in cui il vettore  $h$  va da zero a  $100\mu m$  con passo di  $1\mu m$ , è inadeguato a permettere di analizzare il reale comportamento costitutivo del materiale nelle immediate vicinanze dello snervamento, o meglio, non è in grado di permettere la rilevazione di scostamenti dal modello di Hollomon. Infatti, per applicare il primo livello di interpolazione, che è una polinomiale con tre gradi di libertà, è bene disporre come minimo di 5 o 6 punti, il che significa che, per  $h$  minore di 4 o  $5\mu m$ , i risultati non sono più garantiti.

Il modo per ovviare a tale problema è quello di infittire il database di curve FEM nei pressi dell'origine, magari facendo delle simulazioni con passo di un decimo di  $\mu m$  e limite superiore di  $5\mu m$ , in modo da andare a disporre di un consistente numero di punti da interpolare anche per valori di  $h$  ad  $1\mu m$ . E' chiaro che una simile operazione richiede una massiccia campagna di simulazioni FEM, le quali necessitano di diversi giorni, o anche qualche settimana, per essere ultimate e pertanto, in questa tesi, tale possibilità rimane solo un suggerimento per possibili sviluppi futuri.

E, sempre a proposito di possibili sviluppi futuri, l'andamento dei risultati ottenuti con la IP

applicata alle curve non hollomoniane del paragrafo precedente al variare di  $h_{max}$  suggerisce una possibile strada per ottenere maggiori informazioni riguardo all'effettivo legame tra  $h$  ed  $\varepsilon$ . Infatti, simulando l'indentazione di materiali praticamente hollomoniani fino ad un certo valore di  $\varepsilon$  e poi bruscamente divergenti da questo andamento (tipo ad esempio un materiale come in fig.6.1), si può andare a ricercare il valore di  $h$  di taglio in corrispondenza del quale la IP comincia anch'essa a fornire un risultato sensibilmente diverso da quello iniziale. Così facendo, variando di volta in volta il valore di  $\varepsilon$  a cui la curva di trazione devia dal modello di Hollomon, si possono ottenere una serie di punti da interpolare con una funzione tipo 6.10.

# Capitolo 7

## Conclusioni e sviluppi futuri

### 7.1 Analisi delle curve L-h

Spesso, nei capitoli precedenti, ci si è scontrati con un problema molto grande che è quello del malcondizionamento. Si è infatti messo in luce il fatto che aumentando  $\sigma_0$  e diminuendo, nel contempo ed in certe proporzioni,  $n$ , o viceversa, le curve di indentazione finiscono per assomigliarsi in modo quasi indistinguibile. Ciò ha ripercussioni molto importanti su molti aspetti dell'analisi delle curve di indentazione:

- l'azzeramento, che diventa estremamente critico, in quanto, errori sulla determinazione del punto di inizio prova anche di pochi decimi di  $\mu m$  finisce con lo stravolgere completamente il risultato finale fornito dalla procedura di inversione
- la procedura di inversione, che, nella ricerca del minimo valore della norma  $\chi$ , si trova a lavorare una fascia piuttosto estesa del dominio  $\sigma_0$ - $n$  dove tale norma di distanza varia pochissimo da punto a punto
- le interpolazioni, soprattutto il secondo livello, cui sono richiesti livelli di accuratezza elevatissimi dato che, un piccolo errore nella riproduzione delle curve si ripercuote fortemente sul risultato finale

Come spunto per successivi sviluppi, si vuole in questa sede suggerire l'idea di cominciare ad interrogare non più solo il valore della funzione  $h(L)$ , ma anche quello delle sue derivate, soprattutto prima e seconda, in quanto potrebbero fornire utili informazioni per riuscire a sbrogliare matasse piuttosto intricate, soprattutto nell'ambito della fascia del dominio più malcondizionata. Si considerino ad esempio le curve  $L$ - $h$  di fig.7.1 associate alle curve di trazione di fig.7.2. Come si vede, le curve di trazione sono ben distinguibili l'una dall'altra, al contrario delle curve di indentazione che, ad un primo sguardo, porterebbero a concludere immediatamente che si tratta dello stesso materiale indentato più volte.

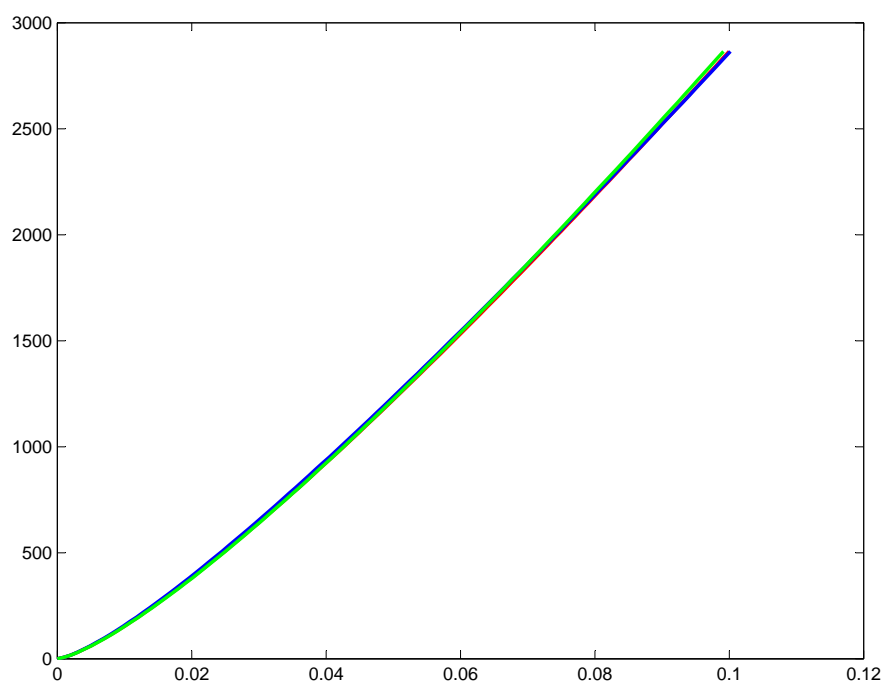


Figura 7.1: Curve di indentazione malcondizionate

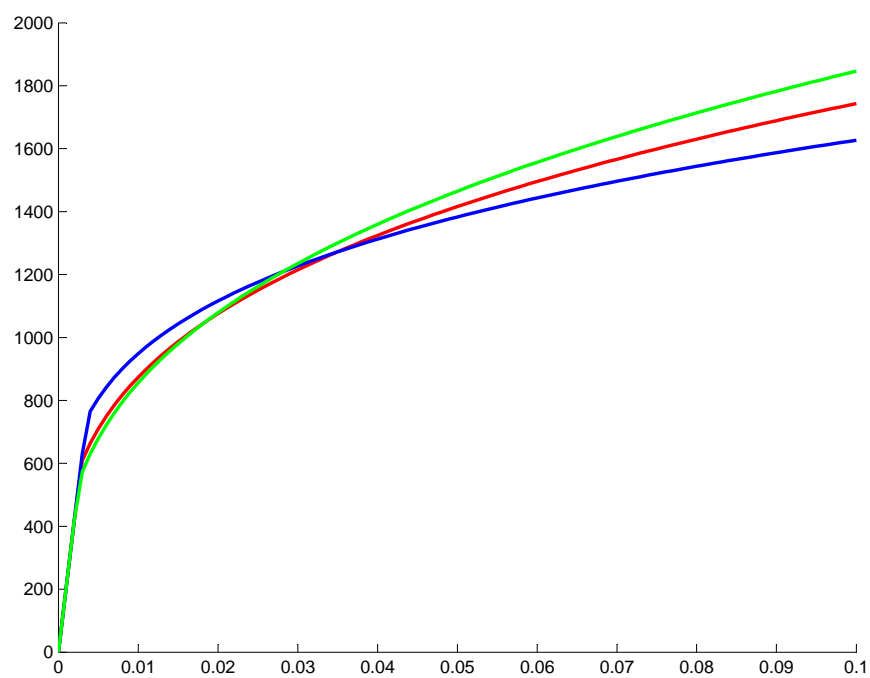


Figura 7.2: Curve di trazione per materiali aventi curve di indentazione riportate in fig7.1

Se si calcola, con il metodo delle differenze centrali, l'andamento della derivata prima per queste tre curve, si ottiene il risultato di fig.7.3. Come si vede, le tre curve  $dL/dh(h)$ , seppur

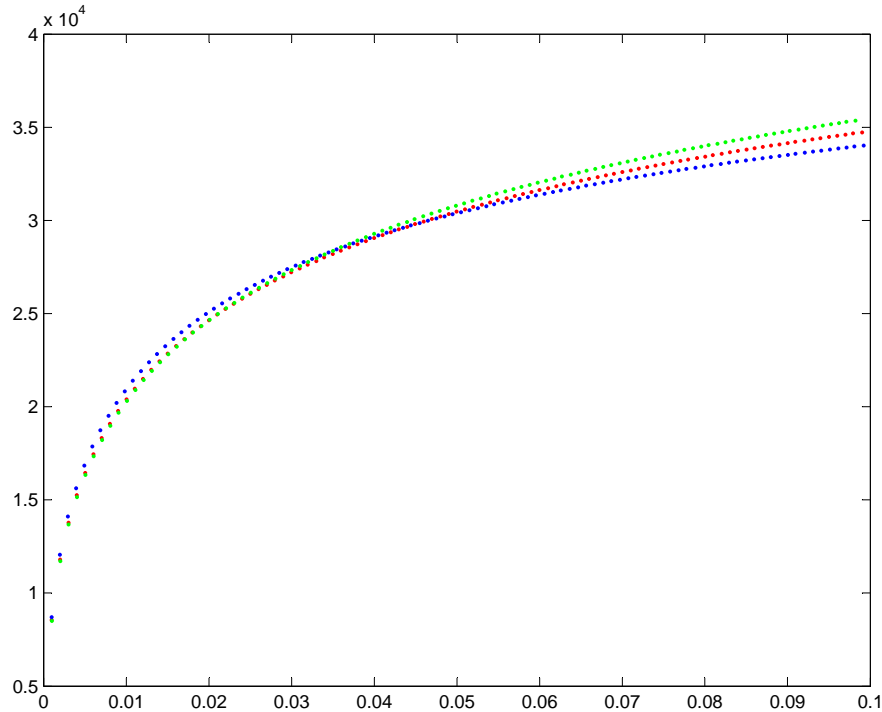


Figura 7.3: Derivate prime delle curve di indentazione di fig.7.1

molto simili, non sono così indistinguibili tra loro come le rispettive funzioni integrali. Ora, non è qui che si vuole affrontare la tematica di come estrarre informazioni utili da queste curve, piuttosto si vuole evidenziare opportunamente questo aspetto, in modo da fornire uno spunto per lo sviluppo futuro di un algoritmo sempre più robusto ed affidabile.

## 7.2 Analisi Incrementale

Si vuole ora proporre un'alternativa, o un'evoluzione, dell'analisi progressiva, che d'ora in poi sarà denominata analisi incrementale. Anche in questo caso, non si svilupperanno calcoli di verifica, ma si vuole principalmente dare uno spunto per lo sviluppo futuro.

Si supponga, innanzi tutto, di conoscere la funzione  $\varepsilon(h)$  e di aver inoltre determinato la prima parte della curva di trazione del materiale applicando la IP al tratto  $0-h_1$  della curva di indentazione.

A questo punto, ci si domanda quali coppie  $\sigma_0-n$  fanno sì che la curva di Hollomon che si genera passi per il punto finale del primo tratto della curva di trazione determinata in precedenza. In

linea teorica ne esistono infinite (fig.7.4). A questo punto, bisogna trovare un criterio di scelta

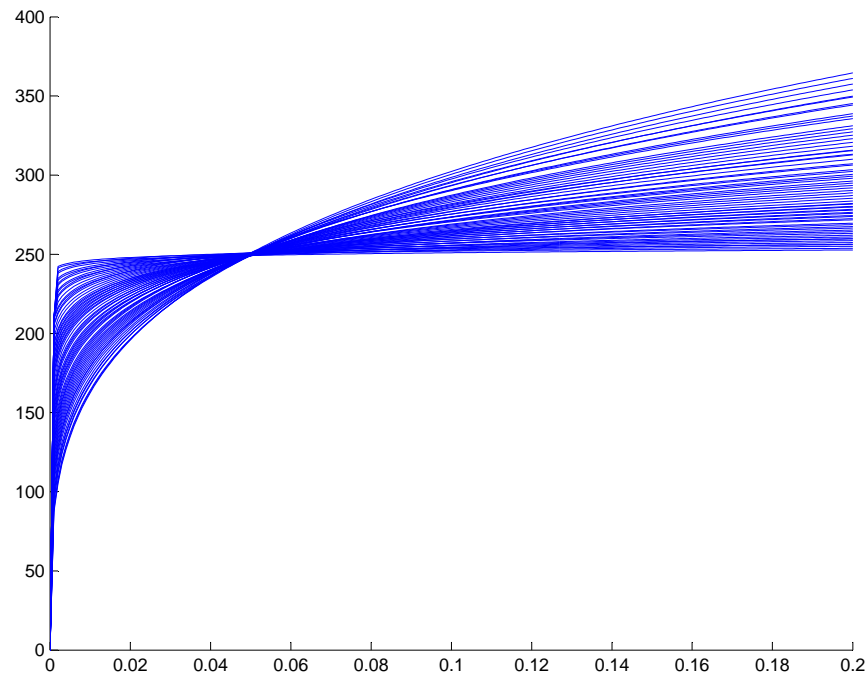


Figura 7.4: Curve di trazione tutte passanti per il medesimo punto

di una tra tutte queste coppie  $\sigma_0-n$ , criterio che deve necessariamente coinvolgere la curva di indentazione. Si potrebbe utilizzare la coppia che, inserita nel secondo livello di interpolazione, fa coincidere meglio le curve  $L-h$  in tutto o in parte (ad esempio confrontando solo il tratto di curva successivo ad  $h_1$ ). Anche qui, il lavoro da svolgere è molto, e non è in questa sede che ciò può essere fatto, tuttavia questo dimostra una volta di più quanti possibili sviluppi possono esserci per migliorare l'algoritmo che, ricevuta in ingresso la curva di indentazione, deve fornire in uscita la curva di trazione del materiale.

## 7.3 Conclusioni

E' il momento di tirare le somme del lavoro svolto in questa attività di tesi.

Per cominciare, si può dire che gli obiettivi preposti di miglioramento dell'algoritmo di inversione per materiali di Hollomon sono stati sostanzialmente raggiunti. E' stata infatti migliorata la procedura di inversione mediante la fase di pre-selezione del dominio  $\sigma_0-n$ , grazie alla quale è ora possibile effettuare la ricerca dei parametri  $\sigma_0-n$  su un dominio di estensione molto inferiore a prima, così da poter usare passi di campionamento abbastanza piccoli da rendere molto più lisce e regolari le ricostruzioni della funzione  $\chi(\sigma_0, n)$  e, di conseguenza, più affidabili i risultati

ottenuti.

Sono stati effettuati diversi interventi sulla funzione analitica: innanzi tutto, l'introduzione del termine hertziano nel primo livello di interpolazione, unitamente alle modifiche apportate alla funzione polinomiale del secondo livello di interpolazione, hanno portato un aumento nell'accuratezza con la quale la funzione riesce a riprodurre l'andamento delle curve di indentazione. E' stata inoltre proposta una serie di nuove possibili forme per il secondo livello di interpolazione, magari ancora da sviluppare e migliorare.

Al di fuori dell'algoritmo di inversione, è stato sviluppata ex-novo una procedura di azzeramento che sembra unire le qualità di efficacia ed efficienza.

Infine è stata riesaminata l'analisi progressiva, ne sono stati messi in evidenza problemi e limiti, ma anche possibili linee di sviluppo e miglioramento.

## Bibliografia

- [1] M.Beghini, L.Bertini, V.Fontanari, *Evaluation of the stress - strain curve of metallic materials by spherical indentation*, International Journal of Solids and Structures 43 (2006) 2441 - 2459
- [2] E.Moriconi, *Interpretazione fisica di dati sperimentali ricavati da prove di indentazione strumentata*, Relazione di Tirocinio, Pisa, Ottobre 2007
- [3] D.Villano, *Tecniche per l'acquisizione e l'elaborazione di misure di indentazione sferica*, Tesi di Laurea, Pisa, a.a. 2006/2007
- [4] M.Pucci, *Miglioramento della rilevazione e dell'interpretazione di misure di indentazione tramite diaptometro*, Tesi di Laurea, Pisa, a.a. 2007/2008
- [5] B.R.Munson, D.Young, T.H.Okiishi, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, J.Wiley & Sons